par Hervé Lehning

Les ponts himalayens

L'Himalaya est célèbre pour ses passerelles suspendues vertigineuses, où le mal de mer s'unit parfois à celui des montagnes. Le randonneur mathématique saura également y reconnaître des courbes familières.

Passage d'un pont himalayen.
Ces ponts sont suspendus à partir des points d'ancrage les plus solides. C'est pourquoi il faut monter pour y accéder.

Les ponts himalayens sont des ouvrages souples, suspendus par leurs deux extrémités. L'ancrage étant essentiel, leur altitude dépend de la qualité de la roche. Il s'agit que les deux extrémités soient approximativement à la même hauteur et indéracinables. Bien entendu, il faut également pouvoir y accéder ! Des deux côtés, on le plantera donc à des endroits accessibles, où la roche est solide.

La courbe du pont

Globalement, le pont se comporte comme une chaîne suspendue par ses deux extrémités. Autrement dit, il prend la forme d'une courbe appelée *chaînette* pour cette raison. Les lignes électriques hautes tensions ainsi que les câbles de téléphériques en donnent d'autres exemples. Galilée pensait qu'il s'agissait d'une parabole, sans doute parce qu'elle est presque indiscernable de l'arc de parabole de même longueur suspendu entre les mêmes points. En fait, son équation est liée à la fonction exponentielle, plus précisément au cosinus hyperbolique (voir l'encadré).

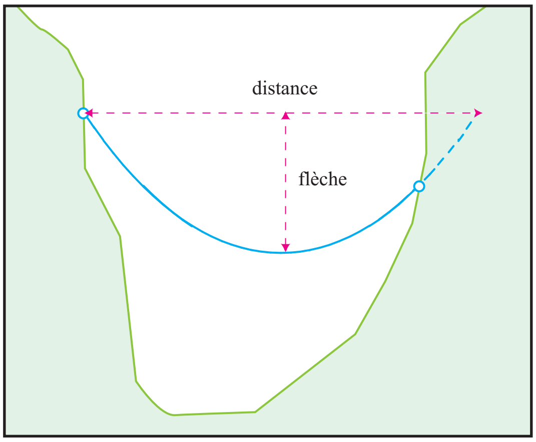
En tendant fortement les câbles soutenant le pont, il serait possible que cette courbe se confonde avec une droite. L'observation montre que ce n'est jamais le cas. Pourquoi ? Tout simplement pour réduire la tension exercée aux extrémités qui, à terme, pourrait faire céder le pont. Pour la minimiser, la forme idéale est celle utilisée pour suspendre les lignes haute tension (figure ci-contre).

Les courbes des ponts suspendus

Si un pont est suspendu par ses deux extrémités, comme ceux de l'Himalaya, sa forme est celle d'une chaînette. En revanche, si le tablier du pont est soutenu par un câble au moyen de filins régulièrement espacés, la forme du câble est celle d'une parabole. La plupart des ponts suspendus existant rentrent dans ce cadre.

Les câbles du pont de Tancarville et leurs ombres dans l'eau. Leur forme est celle d'une parabole.

Pour cela, la flèche doit être égale au tiers de la distance entre les points d'appui, s'ils sont à la même altitude (voir *Tangente Sup* numéro 24 pour le calcul). Bien entendu, dans la pratique, il suffit que la tension reste à un niveau raisonnable. La flèche est donc rarement aussi importante. Au départ, la descente serait d'ailleurs dangereuse ! Dans les faits, on ne dépasse qu'exceptionnellement une flèche de l'ordre du dixième de la distance.



Minimisation de la tension. Le rapport entre la flèche et la distance doit être égal à 1/3.

Stabilisation des ponts

Un pont fabriqué ainsi est sujet à des mouvements de roulis et de tangages, ce qui rend sa traversée délicate dès que plusieurs utilisateurs l'empruntent. Le vent a également une influence non négligeable sur sa stabilité. Pour éviter ces inconvénients, le plus simple est de le stabiliser par des câbles exerçant une tension latérale.

Cette photographie montre les câbles tendant latéralement le pont de chaque côté. Ils sont régulièrement espacés le long de deux courbes symétriques, de forme parabolique.

La courbe tendant ces câbles épouse la forme d'une parabole afin que la tension exercée soit constante le long du pont. Dans les ponts himalayens, on retrouve donc simultanément les deux courbes des ponts suspendus : la chaînette et la parabole.

H.L.

Le cosinus hyperbolique

Les cosinus et sinus ordinaires permettent de paramétrer le cercle trigonométrique car la somme de leurs carrés est égale à 1 : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. *De même les cosinus et sinus hyperbolique permettent de paramétrer l'hyperbole équilatère, ou plutôt l'une de ses branches. Plus précisément :* $\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$ *et :* $\mathrm{ch}\, x > 0$. *Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique s'écrivent en fonction de l'exponentielle de la manière suivante :*

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{et} \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

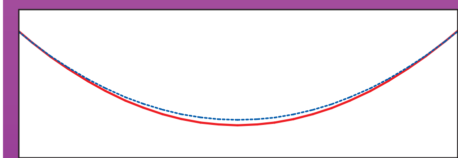
On en déduit facilement l'identité annoncée en élevant ces deux quantités au carré :

$$\mathrm{ch}^2\, x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} \quad \textit{et} \quad \mathrm{sh}^2\, x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}.$$

Les analogies avec les lignes trigonométriques circulaires sont nombreuses. En fait, il existe un lien très fort entre les deux notions. L'analyse complexe est nécessaire pour bien le comprendre, car il vient des formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

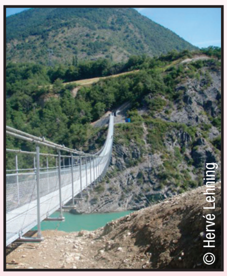
L'équation : $y = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ *où a est une constante, décrit la forme que prend une chaînette soumise à sa seule pesanteur. La figure suivante en présente un arc, en le comparant avec celui d'une parabole de même longueur. Il faut un œil exercé pour voir une différence entre les deux courbes mais, regardez bien, pour la même longueur, les arcs de parabole sont plus « pointus » (descendent plus bas).*



Parabole (en rouge) et chaînette (en bleu) de même longueur suspendue entre les mêmes points.

Les ponts himalayens regroupent chaînette et parabole.

Des ponts himalayens en France



Les ponts himalayens sont apparus dans le paysage français depuis quelques années. La plus longue traverse le lac de Monteynard (Isère). Ce type d'ouvrages est réalisé par des sociétés spécialisées dans les travaux en montagne (construction de refuges, pose de pylônes de téléphériques, paravalanches, etc.).

Passerelle himalayenne du lac de Monteynard, réalisée par la société Stabilisation Protection (Saint Martin de Queyrières, Hautes Alpes).