Par Hervé Lehning

Formes mathématiques du quotidien
La courbe du petit déjeuner

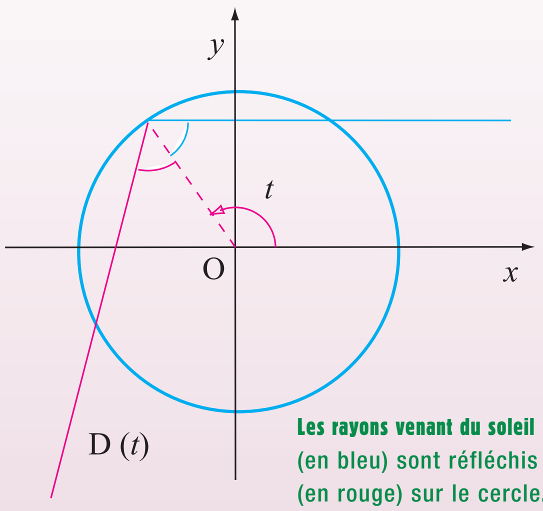
Avez-vous déjà rencontré une épicycloïde ? Si vous répondez « non », vous n'êtes guère observateur, ou dormez encore pendant votre petit déjeuner.

La courbe dans le bol du petit déjeuner. Elle se voit au fond de la tasse. La même courbe est dessinée sur la soucoupe. Tasse peinte à la main sur porcelaine, créée par l'auteur.

Si vous êtes curieux, vous aurez sans doute remarqué une courbe étrange dans votre bol du petit déjeuner (après l'avoir vidé). C'est la même courbe qu'on retrouve en posant une bague sur sa main ou carrément sur le sol. Faites l'expérience et vous ne pourrez plus l'oublier ! On s'en aperçoit vite : ce phénomène est créé par la réflexion des rayons lumineux sur un cercle, mais quelle est donc cette courbe ? Peut-on déterminer son équation et ses propriétés ?

Mise en équation

Il est facile d'étudier la famille des rayons lumineux réfléchis sur un cercle. On trace les rayons venant du soleil, puis les rayons réfléchis sur le cercle. Le lien entre les deux est simple : les deux rayons font des angles égaux avec la normale au cercle au point d'incidence. Si nous choisissons comme axe des x la droite orientée vers le soleil, nous obtenons la figure ci-dessous.



Les rayons venant du soleil (en bleu) sont réfléchis (en rouge) sur le cercle.

L'ensemble des rayons réfléchis sur le cercle de centre O et de rayon R peut être paramétré en fonction de l'angle polaire t du point d'incidence sur le cercle. Nous obtenons une droite D (t) d'équation :
$x \sin 2t - y \cos 2t - R \sin t = 0$.

Calcul d'une équation

Cherchons l'enveloppe de cette famille D (t) c'est-à-dire la courbe Γ de paramétrage $t \mapsto M(t)\left|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right.$ telle que, pour tout t, D (t) soit tangente à Γ en M (t). Cette courbe est donc telle que M (t) $\in$ D (t) et $\dfrac{d\vec{M}}{dt}(t) \in \vec{D}(t)$ pour tout t. Ces deux conditions s'écrivent :

$$(S)\begin{cases} x(t)\sin 2t - y(t)\cos(2t) - R\sin t = 0 \\ x'(t)\sin 2t - y'(t)\cos(2t) = 0 \end{cases}.$$

En dérivant la première égalité de S et en soustrayant la seconde, on montre que S implique :

$$(S')\begin{cases} x(t)\sin 2t - y(t)\cos(2t) - R\sin t = 0 \\ 2x(t)\cos 2t + 2y(t)\sin(2t) - R\cos t = 0 \end{cases}.$$

Réciproquement, S' implique également S donc les deux systèmes sont équivalents. Le deuxième se résout facilement en :

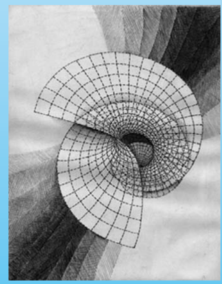
$$\begin{cases} x(t) = R\left(\sin t \sin 2t + \dfrac{\cos t \cos 2t}{2}\right) \\ y(t) = R\left(-\sin t \cos 2t + \dfrac{\cos t \sin 2t}{2}\right) \end{cases}$$

qui constitue donc un paramétrage de la courbe Γ cherchée.

Art et courbes

Dans le cadre du « Noël des Matheux », *Tangente* vous propose un certain nombre d'objets d'art mathématique (voir détails en page 8), dont la tasse « Courbe du petit déjeuner ».

Tasse « courbe du petit déjeuner »
La tasse « courbe du petit déjeuner », création d'Hervé Lehning (herve.lehning@prepas.org), en fait partie. La soucoupe porte un dessin de la courbe et la tasse les explications de sa provenance.

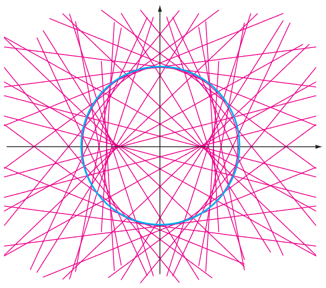


Gravure « Surface minimale spirale »
Patrice Jeener (patricejeener@wanadoo.fr) ne grave pas des courbes, mais des surfaces qui, naturellement, regorgent de courbes tracées dessus. Pour le Noël des matheux, nous en avons sélectionné quelques unes, dont cette « Surface minimale spirale ».

Lampe « L'équation du cœur »
Hervé Lehning ne se contente pas de créer des tasses. Il expose également des lampes à thème mathématique, dont « L'équation du cœur », consacrée, chacun l'aura compris, au tracé d'une cardioïde et sélectionnée par Tangente dans le cadre du Noël des matheux.

+ Tracé des rayons réfléchis

En traçant cette famille de droites à l'aide d'un logiciel graphique, on obtient la figure suivante :



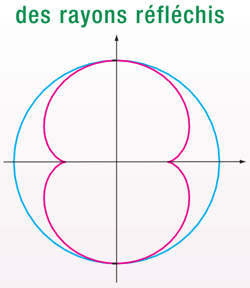
Tracé de la famille des rayons réfléchis

Les rayons réfléchis se focalisent sur la courbe Γ vue dans notre bol du petit déjeuner. Plus précisément, la focalisation a lieu en des points où les droites D (t) sont tangentes à Γ. Cette remarque suffit pour déterminer des équations paramétriques de la courbe du petit déjeuner (voir l'encadré « calcul d'une équation »).

Nous obtenons le paramétrage suivant de la courbe cherchée :

$$\begin{cases} x(t) = R\left(\sin t \sin 2t + \dfrac{\cos t \cos 2t}{2}\right) \\ y(t) = R\left(-\sin t \cos 2t + \dfrac{\cos t \sin 2t}{2}\right) \end{cases}$$

Un logiciel graphique permet de la tracer, en faisant varier t sur un intervalle d'amplitude $2p$, $[0,\ 2p]$ par exemple. Voici le résultat :



Enveloppe de la famille des rayons réfléchis

+ Enveloppe d'une famille de droites

On retrouve la courbe aperçue dans notre bol de petit déjeuner, ainsi que sa symétrique par rapport à l'axe vertical. Rien de plus naturel que la partie symétrique n'apparaisse pas dans la tasse : elle correspondrait à des rayons lumineux se réfléchissant sur la partie droite du bol, ce qui ne peut se produire, du fait de l'opacité de la tasse.

Notre étude confirme notre analyse : il s'agit bien de l'enveloppe des rayons réfléchis sur un cercle. Rappelons qu'on appelle enveloppe d'une famille de droites une courbe à laquelle toutes les droites de cette famille sont tangentes. Le calcul d'un paramétrage d'enveloppe vous est proposé en encadré.
Ce type de génération met en évidence de nouveaux liens entretenus par la géométrie avec d'autres branches des mathématiques, ici l'analyse différentielle.

+ La néphroïde : une épicycloïde

La courbe Γ trouvée a été baptisée *néphroïde* à cause de sa ressemblance à un rein (on retrouve la racine grecque « néphros » dans le terme « colique néphrétique »). En utilisant les formules de trigonométrie, on peut simplifier son paramétrage en :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{R}{4}\left(3\cos t - \cos 3t\right) \\ y(t) = \dfrac{R}{4}\left(3\sin t - \sin 3t\right) \end{cases}$$

.
Ces équations sont celles d'une *épicycloïde* c'est-à-dire le lieu du point d'un cercle roulant sans glisser sur un autre. Selon le rapport k des rayons du cercle fixe au cercle variable, on obtiendra une cardioïde ($k = 1$), une néphroïde ($k = 2$), etc., l'entier k définissant le nombre de points de rebroussements de l'épicycloïde. Le dessin ci-contre représente l'épicycloïde obtenue pour $k = 5$.

Si k est rationnel mais non entier, l'épicycloïde a besoin de plusieurs tours pour se tracer. Voici celle obtenue pour $k = 5/2$.

Dans le cas où le cercle variable roule à l'intérieur du cercle fixe, on parle d'*hypocycloïde*.

H.L.