



Pour que les trains à grande vitesse ne dérailent pas dans les virages, on joue sur la courbure et le dévers. Quels calculs faut-il faire pour dessiner les courbes ?

Tourner, vite et bien

Dans un TGV roulant à 320 kilomètres par heure (km/h), un voyageur commente : « C'est extraordinaire, on ne sent pas la vitesse ! ». Son voisin lui répond : « Exact, mais ordinaire. » L'homme est-il blasé ? Non. Effectivement, le corps n'éprouve que l'accélération. Il ne ressent la vitesse qu'en courbe, à travers l'accélération centrifuge.

Accélération centrifuge

L'accélération centrifuge est égale au carré de la vitesse V du train (en mètres par seconde) divisé par le rayon de courbure R de la voie (en mètres), soit V^2/R . Aussi bien pour le confort des passagers que pour la stabilité du train, on conçoit les lignes de façon à limiter la force centrifuge. D'après la formule, pour la limiter à 20% du poids, il est nécessaire que R soit supérieur à V^2 divisé par 20% de l'accélération de la pesanteur (soit 9,81 mètres par seconde au carré). Cette valeur croît très vite avec la vitesse, en raison du carré dans la formule : si on double la vitesse, on doit quadrupler le rayon. À 90 km/h, le rayon doit donc être supérieur à 320 mètres. Pour 180 km/h, il est déjà de 1 280 mètres ; pour 360 km/h, de 5 120 mètres. La norme utilisée actuellement pour les lignes à grande vitesse (LGV) est de 4 000 mètres au

Hervé Lehning

professeur de mathématiques spéciales au lycée Janson-de-Sailly.
Herve.lehning@prepas.org

minimum, ce qui correspond à une vitesse maximale de 320 km/h. Quant au record de 2007, 574,8 km/h, il a été réalisé sur une portion de voie où les courbes avaient un rayon minimum de 15 kilomètres.

Dans un premier temps, on peut donc voir le tracé d'une ligne à grande vitesse comme un travail simple : on trace

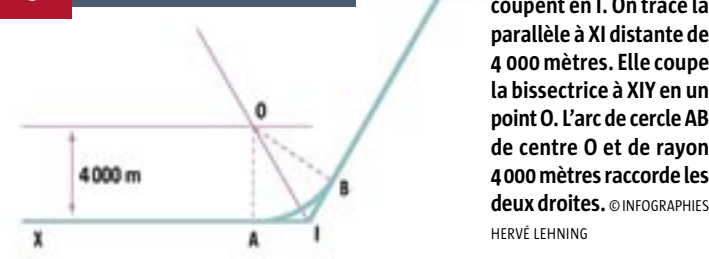
une succession de lignes droites que l'on raccorde par des arcs de cercle de 4 000 mètres de rayon [fig. 1]. Mais en raisonnant ainsi, un problème se pose à la jonction entre la ligne droite et le cercle. La force centrifuge y passe brusquement de 0% à 20% du poids, ce qui déstabilise les passagers et risque de faire dérailler le train. C'est pourquoi il

est nécessaire de raccorder la droite et le cercle par une ligne dont la courbure passe progressivement de 0 à 1/4 000 [fig. 2].

Spirale de Cornu

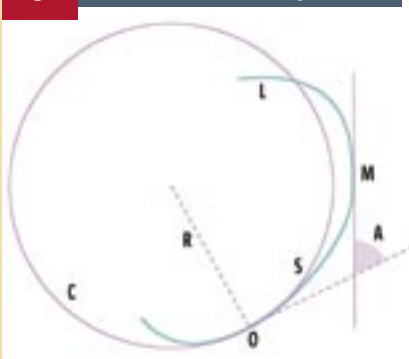
On peut par exemple imposer que la courbure varie proportionnellement à la distance parcourue. On construit une telle courbe en voiture lorsque l'on roule à vitesse constante et que l'on tourne le volant uniformément. Elle fut étudiée pour la première fois par Jacques Bernoulli en 1705, au cours d'études d'optique. Le physicien français Alfred Cornu (en médaillon) la rencontra en 1874, lui aussi en étudiant l'optique. Elle lui

Fig.1 Raccorder les voies



LES DROITES XI ET IY se coupent en I. On trace la parallèle à XI distante de 4 000 mètres. Elle coupe la bissectrice à XIY en un point O. L'arc de cercle AB de centre O et de rayon 4 000 mètres raccorde les deux droites. © INFOGRAPHIES HERVÉ LEHNING

Fig.2 La courbure moyenne



LA COURBURE MOYENNE entre les points O et M de la courbe L est le rapport entre l'angle A que font les tangentes en O et M et la longueur S de l'arc OM. La courbure en O est la limite de cette courbure moyenne quand M tend vers O. Son inverse est appelé le rayon de courbure en O et le cercle C, le cercle osculateur en O à L. Localement, il s'agit du cercle approchant le mieux la courbe L. Ainsi, la courbure d'une droite est nulle et celle d'un cercle, égale à l'inverse de son rayon.



© IBS/PHILIPPE GIRARD/RF

LES COURBES des lignes à grande vitesse sont dessinées de façon à limiter la force centrifuge. Leur rayon, au moins égal à 4 000 mètres, permet aux trains de passer à 320 kilomètres par heure.

doit le nom de « spirale de Cornu ». Un peu plus tard, en 1886, le mathématicien italien Ernesto Cesàro la nomma plus poétiquement « clothoïde » car sa forme rappelle celle du fil s'enroulant autour du métier à tisser [fig. 3] – *clotho* signifie « je file (la laine) » en grec. L'équation de la clothoïde se prête mal au calcul si l'on ne dispose pas d'un ordinateur. C'est pourquoi les voies de chemin de fer ont longtemps été conçues (et continuent à l'être en France) à partir d'approximations d'équations simples, les paraboles cubiques : des courbes où l'ordonnée varie proportionnellement au cube de l'abscisse.

De façon concrète, cette courbe de raccordement entre voie rectiligne et cercle est entièrement définie quand on précise sa longueur car c'est cette donnée qui impose le coefficient de proportionnalité entre courbure et distance. En France, la norme est de 130 mètres, mais ce choix est empirique. Il correspond à un temps de 1,5 seconde à 320 km/h ce qui est très court. La courbe se raccorde alors sur son cercle osculateur [fig. 1].

Dévers artificiel

Afin de minimiser encore la force centrifuge, on crée un dévers entre le rail intérieur et le rail extérieur. Dans l'idéal, on peut ainsi entièrement

compenser l'effet de la force centrifuge [fig. 4]. Il suffit d'un dévers de 12° pour équilibrer une force centrifuge de 20 % du poids occasionnée sur une courbe de 4 000 mètres de rayon à une vitesse de 320 km/h. Sachant que les rails sont écartés de 1 435 millimètres, cet angle correspond à un dévers de

POUR EN SAVOIR PLUS

■ Émile Turrière, *Bulletin de la S.M.F.*, 67, 62, 1939.

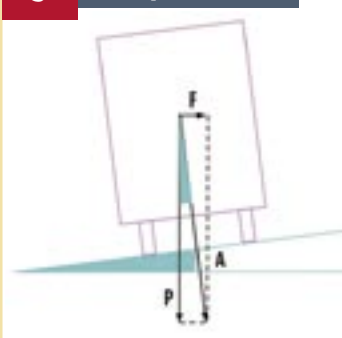
■ Louis Klauder et al., *Transportation Research Record*, 1785, 41, 2002.

Fig.3 La clothoïde



LES CLOTHOÏDES OU SPIRALES DE CORNU se déduisent toutes par similitude de celle représentée ici. Par ses équations cartésiennes, la clothoïde est liée aux intégrales de Fresnel.

Fig.4 Compensation



LA FORCE CENTRIFUGE F est compensée si, en l'ajoutant au poids P, il résulte une force perpendiculaire au plan de la voie. Il suffit pour cela que le dévers fasse le même angle A que cette résultante avec la verticale. Ainsi, pour équilibrer 20 % du poids, on choisit un angle A dont la tangente est égale à 0,20, soit $A = 12^\circ$ environ.

300 millimètres entre les deux rails. En fait, les normes ne retiennent qu'un dévers de moitié : 150 millimètres. Pourquoi ? C'est une marge de sécurité que l'on applique pour envisager le cas où le train s'arrête en pleine courbe. D'après les calculs, si ce dévers atteint 400 millimètres, le train se couche. En limitant le dévers, on s'assure aussi qu'il n'y aura pas de problème au passage de trains d'entretien, lourds et lents.

Adoucir les angles

Lorsque l'on conçoit une ligne à grande vitesse, il faut donc prendre en compte des passages simultanés d'une courbure nulle à une courbure égale à $1/4\,000$ et d'un dévers nul à un dévers de 150 millimètres, soit de 6° . Comment concevoir le raccordement ? On peut relever seulement le rail extérieur, ou abaisser simultanément le rail intérieur. Ces deux méthodes ont le même inconvénient si on analyse le roulis. Jusqu'à présent, les concepteurs ont remédié à ce problème de façon empirique en adoucissant les transitions à l'aide d'une courbe de raccordement supplémentaire. Cela vaut aussi bien pour l'évolution de la courbure que pour celle du dévers. La théorie vue jusqu'à présent correspond à une ligne brisée, l'idée empirique est d'en adoucir les angles. Depuis l'avènement des trains à grande vitesse, les ingénieurs et chercheurs se posent la question de manière plus scientifique. Cela leur permet d'intégrer des problèmes de maintenance. En particulier, les voies de chemin de fer sont le plus souvent des courbes gauches (non planes) : il est rare que quatre roues soient posées simultanément sur les rails (de même qu'un tabouret à quatre pieds n'est bien posé que si la surface est parfaitement plane). Cela provoque une souffrance accrue du matériel, y compris une usure et un déplacement des rails. Cette question, étudiée depuis le XIX^e siècle, reste très ouverte et fait l'objet, encore aujourd'hui, de nombreux brevets. ■