LES ÉTAPES DU MILLÉNAIRE

GERBERT D'AURILLAC

Après les flux et reflux des périodes antiques, le deuxième millénaire de notre ère se caractérise par un progrès continu des champs de la connaissance et des mathématiques en particulier. Une étude détaillée laisse cependant voir de grandes époques et une respiration de l'histoire.

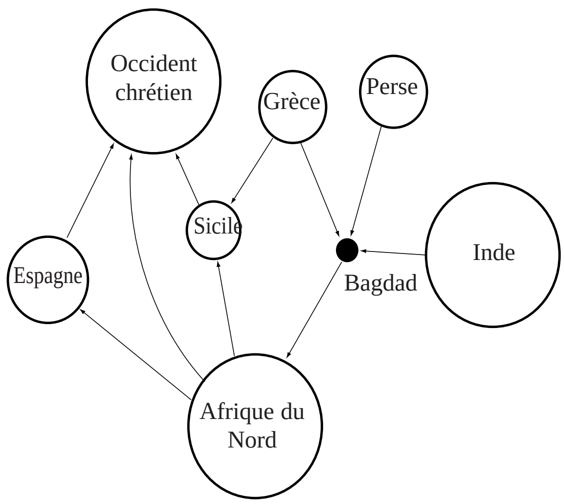
Faire commencer une histoire des mathématiques en l'an 1001 semble une gageure. Vu de loin et intellectuellement parlant, rien ne bouge avant le XVI$^{\text{ième}}$ siècle. Cependant, cette vision de l'histoire est abusive pour au moins deux raisons. Tout d'abord, elle met exagérément le centre de la planète en Occident chrétien. Les Arabes n'avaient pas perdu les acquis de l'Antiquité. Ensuite, elle fait l'impasse sur la renaissance médiévale. En effet, le Moyen-Âge n'a pas été aussi obscurantiste que sa caricature le laisse parfois croire.

■ *Le pape de l'An Mil*

L'église catholique passe souvent pour l'institution la plus obscurantiste de ces temps. La figure du pontife de l'An Mil contredit cette idée puisqu'il s'agit de Gerbert d'Aurillac, pape sous le nom de Sylvestre II. Nous lui devons la première introduction des chiffres arabes en Occident. Faut-il s'en étonner ? Sans doute moins qu'il n'y paraît. Les monastères étaient les seuls lieux de culture de cette époque. Gerbert avait découvert en Espagne ces chiffres, partie du monde musulman à l'époque. Ne vous étonnez pas trop de cette présence d'un moine dans un tel lieu. Les croisades n'ont pas encore eu lieu.

■ *Transmission*

A l'époque de Gerbert, les connaissances mathématiques grecques et indiennes commencent à pénétrer l'Occident, principalement à travers les relations commerciales avec l'Orient, le royaume normand de Sicile et l'Espagne. Le siècle qui suit sera celui des traducteurs. *Les Eléments* d'Euclide sont traduits en latin ainsi que les tables astronomiques d'Al-Khwarizmi (voir algorithme, page 45). De cette transmission par les Arabes, nous devons d'autres mots comme algèbre (voir page 45) ou sinus (traduction latine du mot arabe "jaib" déformation du mot indien signifiant "corde").



Voies de transmission des mathématiques grecques et indiennes à l'Occident chrétien.
Notez qu'à cette époque, l'Espagne faisait partie de l'Occident musulman, le Maghreb.

■ *Assimilation progressive*

Les premières traductions ne sont pas accompagnées d'une compréhension profonde des textes. Aucun progrès dans la lignée des anciens ne les accompagne. Les mathématiciens de l'époque sont davantage intéressés par les nouvelles techniques de calcul. Elles sont utiles pour le commerce. Nous les devons essentiellement aux Indiens et aux Arabes. Les plus grands mathématiciens de l'époque furent Fibonacci (voir l'article "Moyen-Âge : la numération décimale s'impose en Occident") et Oresme, précurseur de l'utilisation des systèmes de coordonnées (voir l'article "Le repère de Descartes"). Ces deux grands apports se situent donc surtout au niveau technique. Rien de péjoratif dans cette remarque, ce niveau était indispensable aux progrès ultérieurs.

La véritable redécouverte des mathématiques se situe quand ces techniques de calcul alliées au symbolisme algébrique (voir l'article : "Viète, la naissance du calcul littéral") commencent à féconder le vieil héritage grec. Nous sommes alors en pleine Renaissance, au XVI$^{\text{ième}}$ siècle. Les algèbristes italiens (Cardan, Tartaglia, Ferrari) résolvent les équations du troisième et du quatrième degré. Ils échoueront sur les équations générales de degré supérieur et il faudra attendre le XIX$^{\text{ième}}$ siècle pour qu'Abel démontre l'impossibilité de cette tâche (voir l'article "la résolution des équations").

■ *Le début des temps modernes*

La pleine éclosion des mathématiques modernes attendra le XVII$^{\text{ième}}$ siècle. Les découvertes succèdent alors aux découvertes : logarithmes avec Napier et Briggs (voir l'article "Des logarithmes au logarithme"), naissance des probabilités avec Pascal (voir l'article "Les probabilités : une paternité multiple"), Descartes (voir l'article "Le repère de Descartes") et Fermat (voir l'article "Fermat ou l'avènement de l'arithmétique") pour ne citer que les plus célèbres du point de vue des mathématiques. Sans doute faudrait-il citer également Simon Stevin, Galilée et Kepler. Ces deux derniers sont plus connus comme astronomes, le premier comme ingénieur et physicien. Cette époque prépare également la suivante, puisqu'on y voit plusieurs mathématiciens devenir maîtres des méthodes d'Archimède de calcul d'aire. Ce sont les véritables précurseurs modernes du calcul infinitésimal et de l'introduction des mathématiques dans les sciences physiques. La tradition médiévale dans cette discipline venait d'Aristote. Elle voulait trouver des explications aux phénomènes naturels et non se contenter de les décrire pour les prévoir comme nous le faisons depuis (voir l'article "Newton et la physique devint mathématique").

■ *L'explosion mathématique*

La grande époque est juste postérieure. Le XVIII$^{\text{ième}}$ siècle voit successivement l'invention du calcul infinitésimal et son utilisation pour résoudre les problèmes de tangente et de calcul d'aire ainsi que de nombreux problèmes de physique.

De plus, à partir de ce siècle, on peut parler de croissance explosive de la recherche en mathématiques. Une façon sans doute approximative mais néanmoins objective de la mesurer est de compter le nombre de périodiques contenant des articles concernant les mathématiques. Jusqu'en 1700, on n'en dénombre que 17. A la fin du siècle, on en trouve 210 et un siècle plus tard 950. Combien à la fin du XX$^{\text{ième}}$ siècle ? L'unité de compte est devenue la dizaine de milliers.

Mais revenons au XVIII$^{\text{ième}}$ siècle. Dans un premier temps, ces avancées scientifiques se font au détriment de la rigueur. L'introduction d'infiniment petits actuels c'est-à-dire existant réellement comme quantités non nulles inférieures à tout nombre réel strictement positif aboutit facilement à des absurdités. Les grands mathématiciens de l'époque n'en étaient d'ailleurs pas dupes et voyaient en fait ces infiniment petits comme potentiels. Il s'agissait de quantités variables pouvant être rendues aussi petites que désirées. Ces subtilités restaient bien obscures à la plupart et leur faisaient comparer les mathématiques à la théologie. La manipulation d'expression formelle comme la somme infinie :

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

aboutissait à toute sorte d'erreurs. Pour rester sur cet exemple, en groupant les termes deux à deux des deux façons différentes, on obtient deux résultats

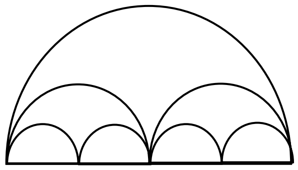
Simon Stevin est né à Bruges en 1548 et mort à La Hague en 1620.

C'était un très bon ingénieur, il a construit des moulins à vent, des écluses et des ports. En mathématiques, il a introduit l'utilisation des décimales en Occident.
Il a écrit plusieurs livres importants de mécanique.

Galilée est né à Pise en 1564 et mort près de Florence en 1642.

Il est surtout connu pour ses travaux en mécanique et en astronomie ainsi que par son procès ordonné par le pape de l'époque au cours duquel il dut abjurer ses erreurs. "Et pourtant, elle tourne" aurait-il ajouté dans sa barbe selon la légende.
A cette époque, les savants étaient beaucoup plus généralistes que de nos jours, la science était également moins étendu. D'autre part, les astronomes avec leurs calculs sont les premiers consommateurs de mathématiques.

A l'heure actuelle, aucun mathématicien ne domine toutes les branches de sa propre discipline, sans parler des autres.



La circonférence d'un cercle étant proportionnelle à son diamètre, le premier demi-cercle a même longueur que les deux demi-cercles de diamètres moitié, que les quatre demi-cercle de diamètre quart et ainsi de suite.

Nous arrivons ainsi à une figure se confondant visuellement avec le diamètre de départ et de même longueur que le premier demi-cercle. Un raisonnement trop rapide permettrait de conclure que le demi-cercle a même longueur que le diamètre c'est-à-dire que $\pi = 2$.

Ceci est bien entendu absurde et montre le type de paradoxe que peut produire des raisonnements abusifs si l'infini est en jeu.

La notion de longueur ne passe pas forcément à la limite.

différents :

$$(1-1)+(1-1)+... = 0$$
$$1+(-1+1)+(-1+1)+... = 1$$

Ces deux résultats sont bien entendus faux. Euler en déduira que le résultat exact est la demi-somme c'est-à-dire 1/2. L'intuition d'Euler était tout à fait correcte mais, sans définition adéquate de la somme d'une série, le raisonnement sous-jacent n'est guère soutenable (voir l'article "infiniment petits : actuels ou potentiels ?").

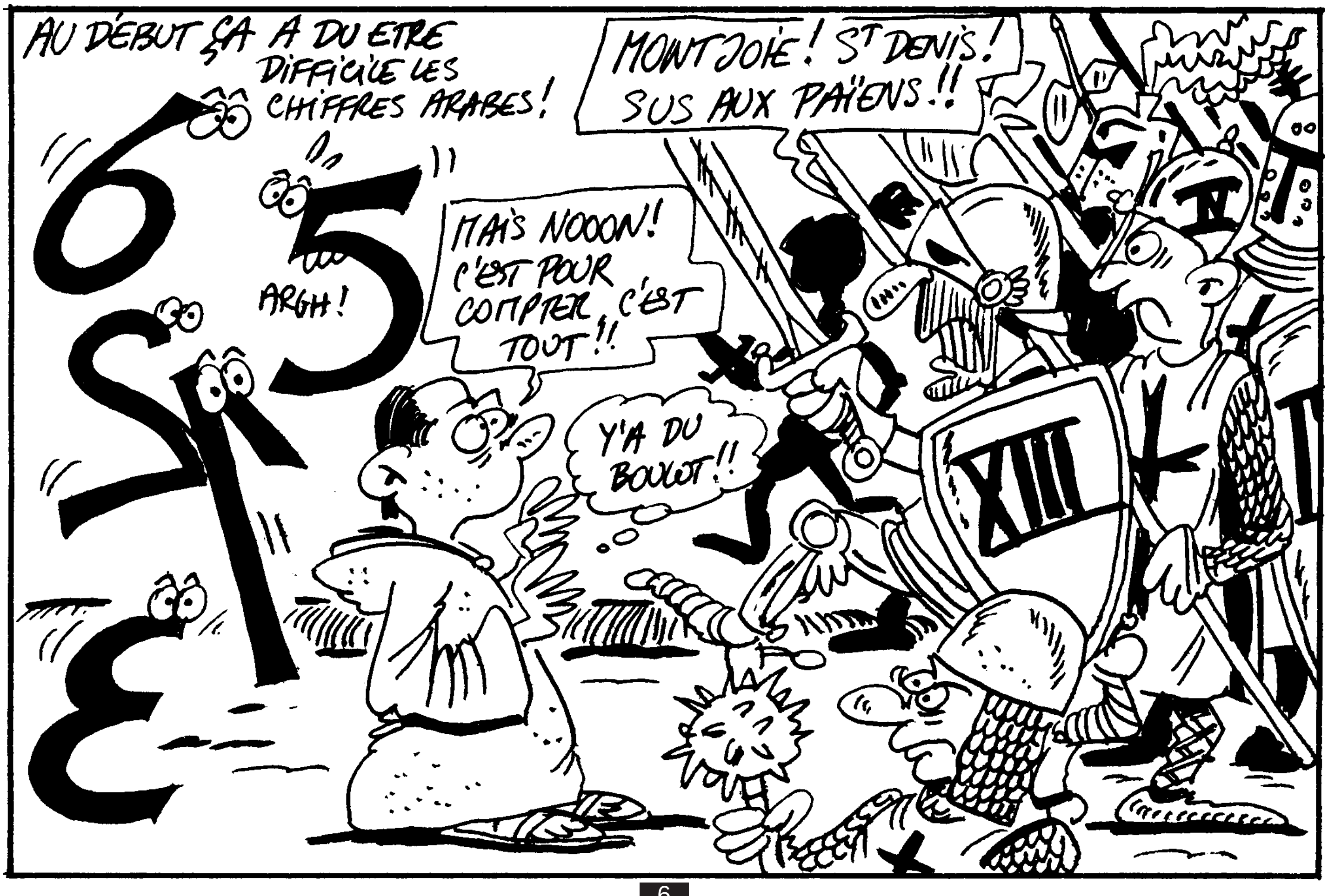
■ *Retour à la rigueur*

Le retour à la rigueur des Anciens vint avec Cauchy. C'est à lui que nous devons la définition des limites et de la continuité utilisée de nos jours dans l'enseignement secondaire. Les infiniment petits actuels disparaissent des mathématiques jusqu'à ce qu'Abraham Robinson leurs donne un fondement théorique rigoureux dans la seconde moitié du XX$^{\text{ième}}$ siècle. Cela n'enlève rien à l'importance de la construction entamée par Cauchy. Cette clarification des bases n'en resta pas là. Les découvertes du XIX$^{\text{ième}}$ siècle vont amener les mathématiciens à essayer de préciser les fondements des mathématiques. Ce sont des recherches sur les séries trigonométriques introduites par souci des applications en Physique qui vont produire une précision de cette notion apparemment si simple d'ensemble.

■ *La crise des fondements*

Si nous restons au niveau du vocabulaire courant et baptisons "ensemble" toute collection d'objets considérée comme un tout unique. Il s'agit alors de l'ensemble de ces objets. Dans ce cas, nous arrivons vite à de nombreux paradoxes. C'est pour cette raison que cette "théorie" des ensembles est dite naïve. Le paradoxe le plus simple a été fourni par Bertrand Russel (voir l'article "la logique moderne : de Boole à Gödel"). Il est lié à la notion d'ensemble de tous les ensembles. Georg Cantor a montré que ce dernier est paradoxal en lui-même.

D'autres paradoxes sont apparus dans différents domaines des mathématiques. Bertrand Russel a montré que tous ces paradoxes étaient plus ou moins équivalents à celui d'Epiménide. Ce philosophe crétois du VI$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus-Christ aimait dire : "les Crétois mentent toujours". Etant lui-même crétois, cette phrase était donc un mensonge.



Conclusion : Epiménide disait la vérité et donc il mentait, etc. Le cercle vicieux était qu'Epiménide étant lui-même crétois énonçait une assertion impliquant tous les crétois, lui-même compris. Autrement dit, cette phrase était autoréférente.

■ *La méthode axiomatique*

L'existence de tels paradoxes fit sentir que les mathématiques étaient bâties sur des bases peu solides. La réponse à ce problème fut le désir d'étendre la méthode axiomatique telle qu'Euclide l'avait conçue à toutes les mathématiques. L'idée de départ était de créer des bases qui excluaient les paradoxes connus. Un certain nombre d'axiomes étant admis, les Mathématiques se réduisaient alors via quelques principes de raisonnements à la Logique.

Les règles de départ d'une théorie sont appelées ses axiomes. Ils ne sont pas censés avoir de sens en eux-mêmes. Les seules conditions que l'on puisse poser concernant ces axiomes sont d'être consistants et complets c'est-à-dire de ne pas conduire à des résultats absurdes et de permettre de prouver tous les résultats vrais de la théorie.
Il n'est pas besoin que ces axiomes aient une signification sensible. Les noms des objets introduits n'ont pas de sens en eux-mêmes. Seules leurs relations importent. Ainsi, l'axiome de géométrie élémentaire : "par deux points distincts, il passe une et une seule droite" pourrait être changé en : "par deux bretzels distincts, ils passe un et un seul bock de bière" si dans les axiomes de la géométrie, nous remplacions "point" par "bretzel" et "droite" par "bock de bière".

Pour les formalistes comme Hilbert (voir l'article "la logique moderne : de Boole à Gödel"), cet d'oubli du sens des objets mathématiques pour ne s'occuper que de leur forme était la condition à payer pour éviter les paradoxes. L'important était de montrer la consistance et la complétude d'une théorie. Ce programme bien modeste en apparence ne put être mené à bien même pour les théories les plus élémentaires comme celle des ensembles ou l'arithmétique. Gödel prouva qu'il était impossible de prouver qu'un système assez riche pour contenir l'arithmétique était complet. Plus précisément, il existe des résultats vrais dans une théorie dont on ne peut prouver qu'ils le sont en restant dans cette théorie. Gödel nous a appris qu'il fallait distinguer le prouvable et le vrai. On pourrait résumer ce fait en disant qu'il en est de même en mathématiques que dans les affaires judiciaires.

Les travaux de Turing complétérent cette idée d'impossibilité de la preuve de certains résultats vrais en montrant qu'aucun algorithme ne pouvait être inventé qui fabrique mécaniquement tous les résultats prouvables d'une théorie. Le prouvable n'est pas entièrement atteignable par un ordinateur, fut-il très puissant.
Dans une vision humaniste, ce résultat est somme toute très rassurant. Finalement, aucune machine ne supplantera jamais l'homme.

■ *Bourbaki*

Ceci dit, une idée ainsi lancée ne s'arrête pas comme cela. L'époque Bourbakiste devait naître de la conception de Hilbert. L'idée de ce groupe de mathématiciens français était d'écrire un traité de toutes les mathématiques "achevées". Les domaines en mouvement étaient ignorés et laissés volontairement en dehors du traité. Le défaut principal est sans doute que ce fait n'est pas toujours perçu par le lecteur. Ainsi, les mathématiques pourtant très vivantes au XX^{ième} siècle, y semblent mortes.

■ *Nouvelle révolution*

A propos du ce courant bourbakiste, on a souvent parlé de mathématiques modernes. Ce qualificatif devrait toujours être évité car ce qui est moderne un jour est ancien le lendemain. Ceci dit, les mathématiques sont à nouveau dans une période de découverte. Comme au XVIII^{ième} siècle, il en sort le meilleur comme le pire. L'histoire jugera. Sans doute écrit-on de nos jours bien des absurdités concernant entre autres les notions de chaos et de fractales. Il n'en est pas moins qu'il s'agit de notions nouvelles et importantes. Ce bouillonnement des idées montre à quel point les mathématiques restent vivantes et utiles. Il serait absurde de vouloir les normaliser complètement. On ne fige d'ailleurs une source qu'en la tarissant.

Hervé Lehning

Henri Cartan est né en 1904 à Nancy où figure une statue du général Charles Bourbaki qui, en son temps, ne fut pas aussi obscur que la légende veut bien le dire.

Nicolas Bourbaki est le nom choisi par un groupe de mathématiciens des années trente. Créé à l'origine par Henri Cartan et André Weil, le nom de ce groupe est celui d'un général Français de la guerre de 1870 (voir ci-dessus). Selon la légende, un des anciens élèves de l'école normale se faisant passer pour un mathématicien suédois, avait cité ce nom comme intitulé d'un théorème lors d'un cours. Les élèves n'y ayant vu que du feu, ils supposèrent Bourbaki russe et lui attribuèrent Nicolas comme prénom. Toujours selon la légende, Bourbaki serait en fait un mot d'origine crétoise signifiant "chef des tueurs".

Dans un des traités de Bourbaki, on trouve au milieu d'un théorème "un ensemble filtrant à droite et à gauche". Dans la version finale de l'ouvrage, ce morceau a été remplacé volontairement par "un ensemble flirtant à droite et à gauche". Sous les pavés, la plage disait-on en 1968. Sous Bourbaki, le canular, pourrait-on également dire. Cela n'enlève rien au sérieux de l'entreprise bourbakiste.