Visualisation et pensée mathématique

Par Hervé Lehning

Abstract : Dessiner n’est pas démontrer, cet argument a longtemps servi pour éviter le recours à la visualisation en mathématiques. Pourtant, un grand nombre de démonstrations, de concepts et d’idées sont plus facilement accessible à l’aide d’un petit dessin. Dans cet article, nous désirons montrer que la visualisation en mathématiques sert non seulement d’illustrations mais est également créatrice d’idées, et cela à tous les niveaux.

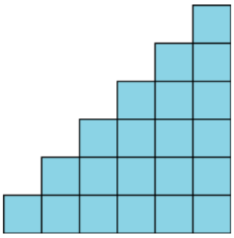
La scène se passe au temps de mes études, mon professeur de géométrie algébrique est au tableau noir, devant un amphi comble. Devant l’auditoire médusé, il démontre un théorème profond de géométrie à grand renfort de diagrammes qu’il dessine d’un trait sûr. Le tableau est blanchi mais, soudain, il s’arrête au milieu d’un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H\,(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "q"] & H\,(X, V) \arrow[d, "q"] & H\,(X–A, V–A) \arrow[l] \arrow[d, "q"] \\
H\,(X/A, V/A) \arrow[r] & H\,(X, & {}
\end{tikzcd}$$

Le temps passe, le professeur se gratte la tête puis commence un petit dessin, que son corps cache à l’assistance. Soudain, il semble illuminé de l’intérieur, efface son dessin et reprend sa démonstration à grand coup de diagrammes, que nous notons sans bien comprendre. À la fin de l’heure, les plus courageux vont jusqu’à son bureau lui demander des explications sur le petit croquis, qui lui avait fait retrouver l’inspiration. Sa réponse fut nette : « pas question de vous polluer l’esprit avec de mauvaises habitudes de pensée ». Son refus de nous communiquer son dessin avait une origine pédagogique : nous devions être débarrassés des erreurs habitudes du passé, dont celle d’utiliser les intuitions que pouvaient donner la considération de figures.

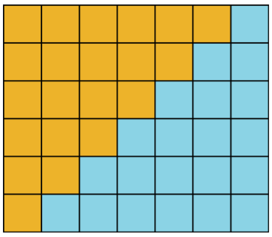
Preuves sans paroles

Cette conception des mathématiques a été prédominante à l'époque des mathématiques que l'on disait « modernes ». Pourtant, un certain nombre de résultats admettent des preuves visuelles (voir [1]). Parmi les plus simples d'entre elles, figure le calcul de la somme des premiers nombres entiers comme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 ce qui peut sembler sans intérêt puisqu'il suffit de savoir compter pour trouver 15. Il est plus compliqué de calculer ainsi la somme des 100 premiers nombres : 1 + 2 + 3 + 4 + … + 100 ou, de façon générale, 1 + 2 + 3 + 4 + … + *n*. L'idée est de modéliser cette somme comme l'aire d'un escalier :

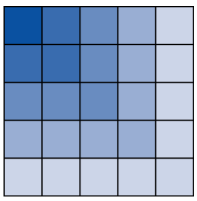


Une visualisation de la somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 comme aire d'un assemblage de carrés.

En retournant l'escalier et en le collant au-dessus, nous obtenons un rectangle :

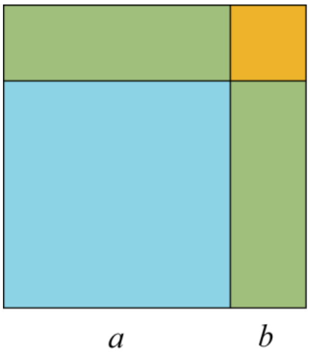


Le double de la somme : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 est donc égale à l'aire du rectangle de côtés 6 et 7, qui vaut 42 donc : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Pour la même raison, de façon générale : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Ce type de preuves sans parole est souvent accepté de nos jours quand elles portent sur des nombres entiers. La même technique permet de montrer que la somme des *n* premiers impairs est égale au carré de *n*.



Preuve sans parole de la formule : $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

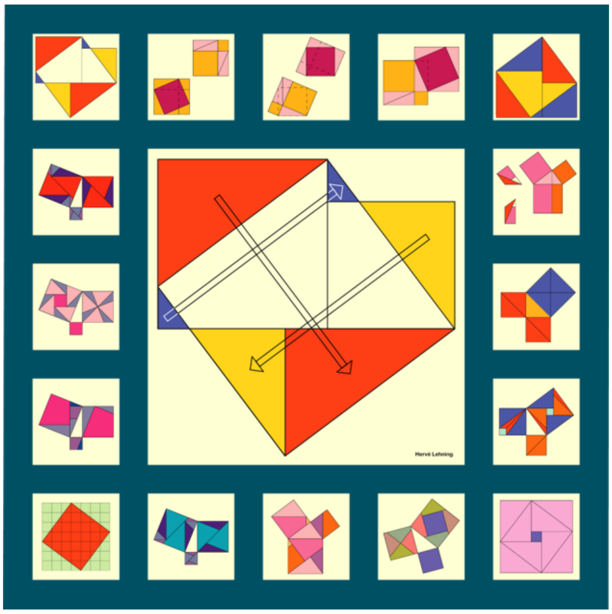
L'identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ admet une preuve *a priori* du même type :



Si les côtés des carrés bleu et orange sont a et b, leurs aires sont égales à a^2 et b^2 alors que celles des rectangles verts sont égales au produit ab.

Cette preuve sans parole est cependant différente de la précédente car, en tout rigueur, elle n'est valable que si a et b se modélisent comme des longueurs, c'est-à-dire sont positifs. C'est l'objection principale des puristes. On peut cependant rendre cette preuve rigoureuse, mais au prix de l'utilisation de mathématiques sophistiquées. Pour cela, on considère le polynôme différence : $f(x, y) = (x + y)^2 - (x^2 + 2\,xy + y^2)$. Il est nul sur un quart du plan or on démontre que, si f est un polynôme non nul, l'ensemble d'équation : $f(x, y) = 0$ est une courbe… ce qui prouve que, dans ce cas, il est nul.

Les preuves sans paroles peuvent donner naissance à des œuvres d'art comme, par exemple, ce tableau représentant des démonstrations du théorème de Pythagore sous forme de puzzles.

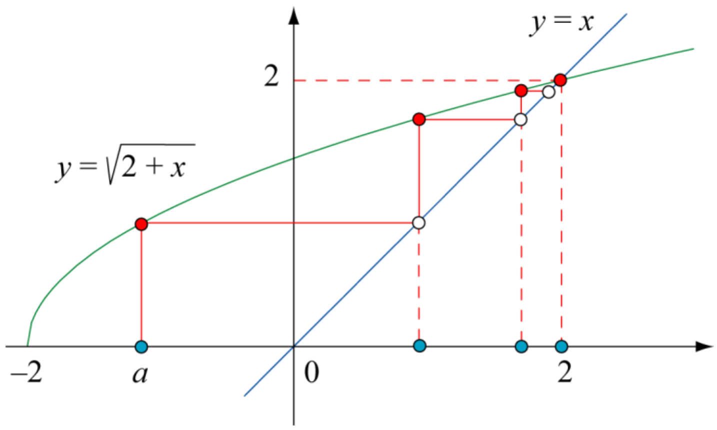


Le dessin central montre les déplacements à opérer pour former le grand carré à partir des deux petits.

On trouvera un grand nombre d'exemples de ce type à un niveau élémentaire dans [2] et à un niveau plus élevé dans [3] ainsi que dans [4].

La visualisation, source d'idées

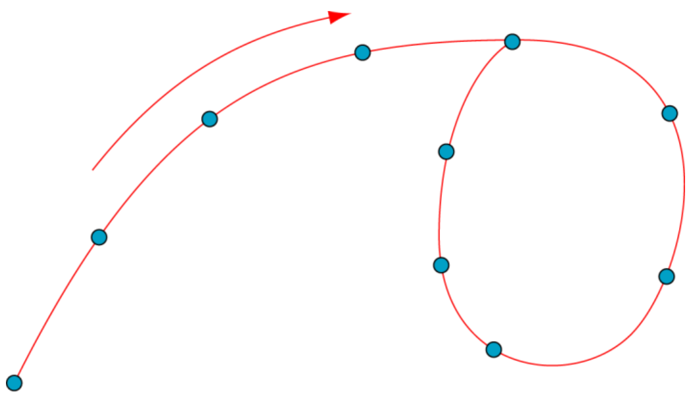
Au-delà de ces preuves sans paroles, visualiser des notions mathématiques, même de façon matériellement fausse, peut donner des idées justes. Prenons l'exemple d'un système dynamique déterministe. On donne un premier nombre, appelé le germe, les autres étant ensuite chacun donné de son prédécesseur d'une manière parfaitement déterminée, comme par exemple à travers la courbe d'équation : $y = \sqrt{2 + x}$. Dans ce cas, si le germe est 0, les nombres suivants sont : $\sqrt{2}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, *etc*. Si nous continuons, cette expression des nombres ne donne aucune idée sur le comportement du système dynamique. En revanche, une visualisation le révèle.



Visualisation d'un système dynamique (les points bleus).

Pour cela, on porte le germe ($a \geq -2$) sur l'axe des abscisses. La verticale en ce point coupe la courbe en un point dont l'ordonnée est le terme suivant ($\sqrt{2+a}$). L'horizontale en ce nouveau point coupe la droite d'équation $y = x$ en un point qui a même abscisse que son ordonnée (donc $\sqrt{2+a}$). La verticale en ce troisième point coupe donc l'axe des abscisses en le second terme de la suite. La même procédure appliquée en ce point donne donc le troisième terme et ainsi de suite. Cette méthode permet de visualiser la suite (points bleus sur la figure). Dans ce cas, elle semble converger vers 2, ce que l'on peut démontrer. La démonstration est aidée par la visualisation mais nous ne rentrerons pas dans ses détails techniques.

Ce type de visualisation suit la géométrie exacte du problème. Des visualisations de même nature peuvent s'en détacher mais donner des résultats intéressants également. La suite de nombres définie par un germe a et une règle déterministe f peut être représentée dans un espace abstrait comme une suite de points.



Visualisation d'un système dynamique comme une suite de points dans un espace abstrait.

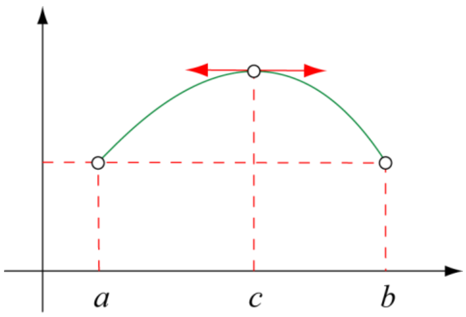
Si, à une certaine étape, nous retrouvons un point, la suite se reproduit alors à l'identique. Autrement dit, elle est périodique. Dans ce contexte, la suite des points décrit une courbe semblable à la lettre grecque rho. Une méthode de factorisation des nombres porte le nom de « méthode rho » à cause de cette visualisation, qui se trouve donc une source d'idées dans ce contexte.

La visualisation, pour comprendre une idée ou un théorème

De même, la visualisation permet de comprendre l'origine du théorème de Rolle :

si une fonction dérivable sur un intervalle prend la même valeur en deux points de cet intervalle alors sa dérivée s'annule entre ces deux points.

En termes mathématiques : si f est dérivable sur un intervalle contenant a et b en lesquels : $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Si on essaye de tracer une courbe entre les points d'abscisses a et b, on remarque qu'on doit passer par un point à tangente horizontale. Bien entendu, cela ne démontre rien mais permet de trouver une idée d'attaque : ce point est manifestement un maximum ou un minimum.

La visualisation, pour comprendre un concept

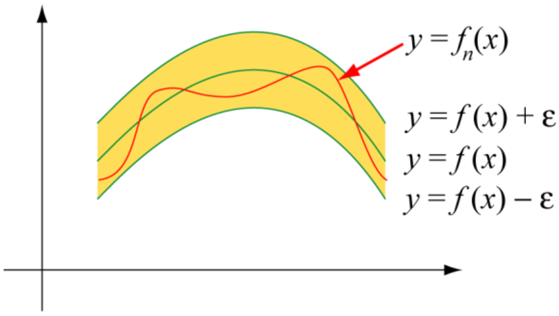
La visualisation est également fondamentale pour comprendre certains concepts, comme celui de convergence uniforme sur un intervalle et, en particulier, sa différence avec la convergence simple. Ces deux notions concernent les suites fonctions définies sur un intervalle I à valeurs réelles. Si f_n est une telle suite et f une fonction,

1) f_n converge simplement vers f sur I si, pour tout $x \in$ I, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$,

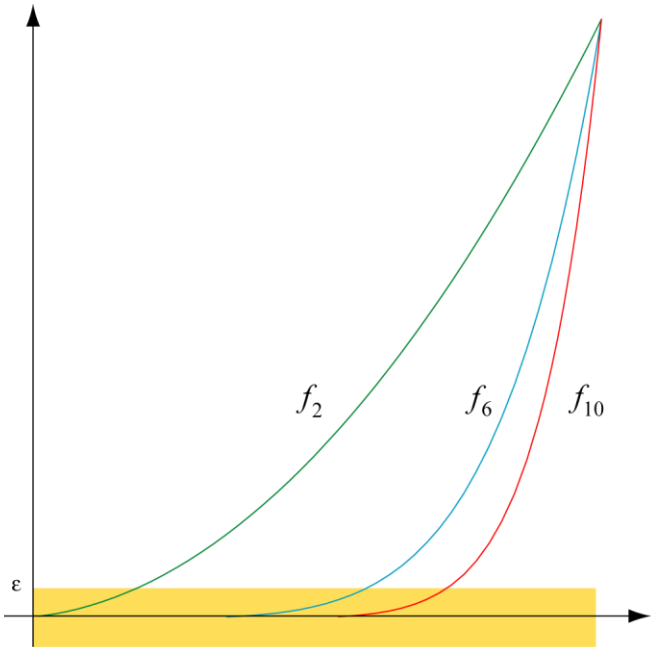
2) f_n converge uniformément vers f sur I si, l'écart maximal entre $f_n(x)$ et $f(x)$ sur I converge vers 0.

En termes mathématiques : f_n converge uniformément vers f sur I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que : $n \geq$ N implique $| f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$ pour tout $x \in$ I.

Si on se contente de ces écritures, on peut facilement confondre les deux notions. En fait, la seconde est plus contraignante car elle signifie que toutes les courbes d'équations : $y = f_n(x)$ sont situées dans le tube limité par les courbes d'équations : $y = f(x) \pm \varepsilon$.



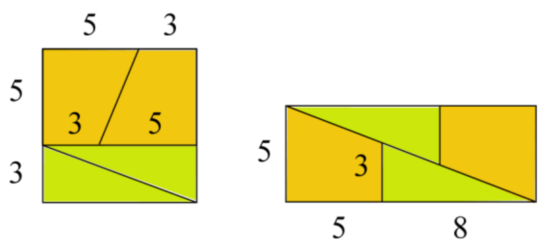
Quand l'indice n augmente, les courbes d'équations : $y = f_n(x)$ se confondent avec celle d'équation : $y = f(x)$. Dans le cas de la convergence simple, ce n'est pas le cas car une « bosse » peut sortir du tube. On peut ainsi créer un exemple montrant que la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme. Ainsi, la suite f_n définie sur [0, 1] par : $f_n(x) = x^n$ sur [0, 1] converge simplement vers la fonction f nulle sur [0, 1[, et égale à 1 en 1 mais ne converge pas uniformément. En effet, les courbes d'équations : $y = f_n(x)$ finissent toujours par s'échapper du tube limité par les courbes d'équations : $y = \pm\, \varepsilon$.



D’autres exemples de ce type, utilisant un ordinateur, se trouvent dans [5].

Conclusion

En conclusion, nous voyons que la visualisation des notions mathématiques ne se limite pas à les illustrer, elle est également à l’origine d’idées. Vouloir s’en priver, c’est se priver d’un outil indispensable. Il reste cependant que ces intuitions doivent être contrôlées par la rigueur mathématique, au risque de voir apparaître des paradoxes comme celui de Lewis Carroll qui tendrait à montrer que 64 = 65.



Paradoxe de Lewis Carroll : en découpant un carré de côté 8 cm, on obtient un rectangle de côtés 5 et 13 cm.
Autrement dit : 8 x 8 = 5 x 13, soit 64 = 65.

Bien entendu, c’est faux. Les pièces découpées dans le carré de gauche ne recouvrent pas complètement le rectangle de droite. Plus précisément, si les quatre pièces sur la figure de droite recouvrent le rectangle, la longueur notée 3 est légèrement plus longue, égale à 40 / 13 pour être précis.

Référence :

[1] Roger B. Nelsen, *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America (1997)

[2] Jennifer Piggott and Liz Woodham, *Thinking Through, and By, Visualising*, MT 207

[3] George Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, 1945

[4] Hervé Lehning, *À la recherche de la preuve en mathématiques*, Pour la science, 2009

[5] Hervé Lehning, « Mathematics in a Computer Age », *Educational Computing in Mathematics 87*, North-Holland, 1987