Un regard mathématique sur le monde

Hervé Lehning
Professeur de Mathématiques (Paris, France), rédacteur en chef de Tangente
herve@lehning.eu, www.lehning.eu

Abstract

En utilisant des visualisations pour explorer les mathématiques, j'ai été séduit par leur esthétique. Cela m'a conduit à les voir comme une forme d'art et à en produire pour elles-mêmes. J'ai commencé à étudier l'interaction entre les mathématiques et l'art. Au même moment, j'ai découvert que les mathématiciens avaient une façon très spéciale de regarder le monde. Ce papier est un compte-rendu de mes recherches sur ce sujet.

Mots clefs--- **Mathématiques, expérimentation, preuve, photographie, peinture, verre**

1. Introduction

Un grand nombre de mathématiciens présentent les mathématiques à travers des symboles sans connexion avec la réalité. C'est probablement pour cette raison que les mathématiques sont souvent vues comme inutiles, ou pire. Pourtant, la réalité est à l'opposé : notre monde est rempli de mathématiques, des arcs-en-ciel aux dunes de sable et les réflexions sur l'eau, etc. jusqu'aux téléphones cellulaires et la structure du Web (voir [1]). Cependant, penser que le monde a été créé selon un plan mathématique est une erreur philosophique. La vérité est à l'opposé : les principes mathématiques sont l'invention des mathématiciens, abstraits de leurs expériences sensorielles et leur façon particulière de voir le monde (voir [5]), le sujet de cet article. Ainsi, il est important de garder le lien entre les structures abstraites et leurs manifestations dans la réalité concrète. C'est mon *credo* en mathématiques et dans leur enseignement (voir [2] et [3] pour deux exemples, un au niveau du cycle de la licence, l'autre au niveau de la recherche). Cette méthode m'amena à résoudre une conjecture de Douglas Hofstadter (voir [4]), d'abord numériquement puis de manière analytique. De plus, cette méthode que j'utilise depuis longtemps en maths est devenue une motivation pour mon art : photos, vidéos et peintures numériques (voir www.lehning.eu pour des exemples). Ces techniques numériques, combinant réalité et abstraction, peuvent aider à promouvoir cette perception mathématique de la réalité.

2. Un regard particulier

En tant que mathématicien, je me suis aperçu que je ne prenais pas les mêmes photographies que la plupart des gens. Structures, motifs, courbes et symétries m'intéressent plus que tout. Par exemple, la Figure 1 est un cliché que j'ai pris dans le désert du Namib (Namibie) car j'ai été attiré par la disposition étonnante de ces fleurs (1 + 2 + 3), qui évoque les nombres triangulaires étudiés par les mathématiciens grecs de l'Antiquité.

Figure 1 Disposition de fleurs

Figure 2 Parabole dans les dunes

La Figure 2 a été prise au même endroit. Elle montre une parabole dans les dunes. On peut voir un grand nombre de paraboles un peu partout, en particulier sur les toits pour capter la TV ou internet par satellite, ou dans l'Himalaya pour bouillir de l'eau (voir la Figure 3). Bien sûr, la raison se trouve dans les propriétés des paraboles. Ces exemples en sont une bonne introduction.

Figure 3 Parabole dans l'Himalaya

La Figure 4 montre des réflexions sur le lac Gokyo dans l'Himalaya, où la symétrie est presque parfaite. Comme celui-ci, un bon nombre de concepts mathématiques inventés par les mathématiciens existent déjà dans la nature ou, plus précisément, sont abstraits d'elle (voir [5]). Nous rencontrons aussi des symétries dans un sens plus général avec les zèbres et les martins-pêcheurs des Figures 5 et 6.

3. De l'art aux mathématiques

D'un côté, des structures mathématiques sont visibles dans la nature, ce qui ne signifie pas que le monde ait été créé selon un plan mathématique (voir [5]). Cela signifie simplement que les mathématiciens s'inspirent de la nature. Des photographies de structures mathématiques vues dans la nature peuvent être des illustrations de théories mathématiques ou une motivation pour les étudier. Perspectives, réflexions et courbes naturelles sont de bons exemples pour cela. D'un autre côté, l'art peut être à l'origine d'études mathématiques. Symétries, dénombrements ou motifs dans des peintures sont de bons exemples. Les taches des animaux (étudiées par Alan Turing), comme sur la Figure 5 sont un autre exemple. La disposition des deux oiseaux de la Figure 6 peut mener à un sens plus général de la notion de symétrie et à la théorie des groupes.

Figure 4 Symétrie parfaite

Figure 5 Zèbres en symétrie

Figure 6 Martins-pêcheurs en symétrie

3.1. L’art comme illustration

Par exemple, nous pouvons introduire le théorème de Thalès avec des photographies de perspectives comme celle de la Figure 7, prise sur le front de mer de Saint Malo. Avec de telles photographies, dans mes vidéos et mes conférences (voir www.lehning.eu), je montre leurs liens avec les mathématiques, de manière poétique et je peux également expliquer ce lien.

Figure 7 Le théorème de Thalès sur la plage

Pour cela, je prolonge la ligne des pieux de bois (en AC et BD sur la Figure 8) et je fais réaliser qu’elles se rencontrent sur la gauche, en dehors de la photographie (en O sur la Figure 8). Ainsi, le théorème de Thalès rentre dans le monde réel. Les triangles OAB et OCD sont semblables, et nous pouvons aussi effectuer quelques calculs.

Figure 8 Le théorème derrière le front de mer

Nous pouvons également placer une vraie parabole sur la photographie de la dune (Figure 2). Nous obtenons la Figure 9 qui est un bon argument expérimental en faveur de la nature parabolique de cette courbe. Bien sûr, même si le vent semble la cause évidente, une étude de l’origine de cette forme est nécessaire pour la comprendre.

Figure 9 Apparition de la parabole

Cela fonctionne dans nombre de cas. Par exemple, de cette manière, nous pouvons reconnaître un cercle derrière un arc en ciel, des cercles dans la tour Eiffel, des ellipses dans les stations de métro de Paris, etc. Cela mène à des propriétés de ces courbes… et à des idées mathématiques pour les prouver.

Figure 10 Arc en ciel aux chutes du Zambèze

Quand nous voyons un arc en ciel comme celui de la Figure 10, il est facile de penser qu’il ressemble à un arc de cercle. On rend ce fait évident en ajustant un vrai cercle à l’arc en ciel. Le point à droite de la Figure 11 est le centre de ce cercle. Elle montre que le cercle centré en ce point semble coïncider avec l’arc. L’étude de l’origine d’un arc en ciel confirme qu’il s’agit bien d’un cercle, intersection d’un plan et d’un cône d’angle au centre de 84° et d’axe, la droite reliant l’observateur et le soleil.

Figure 11 Cercle coïncidant avec l'arc en ciel

3.2. L'art comme énigme mathématique

Pour le mathématicien, certaines peintures abstraites sont des énigmes mathématiques. Par exemple, la Figure 12 pose la question:

De combien de façons peut-on diviser un carré 3 par 3 en 1, 3 et 5 carrés adjacents ?

Une étude mathématique montre qu'il y en a 10 et non 9 comme la peinture le suggère.

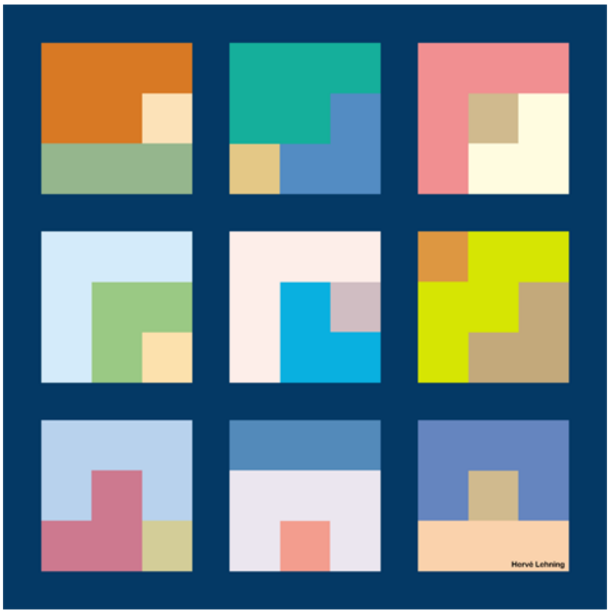

Figure 12 1 + 3 + 5 = 9

La réponse est une autre peinture, décrivant une façon d'aborder la question, une sorte d'article mathématique divisé en 16 carrés entourant la peinture principale (voir la Figure 13).

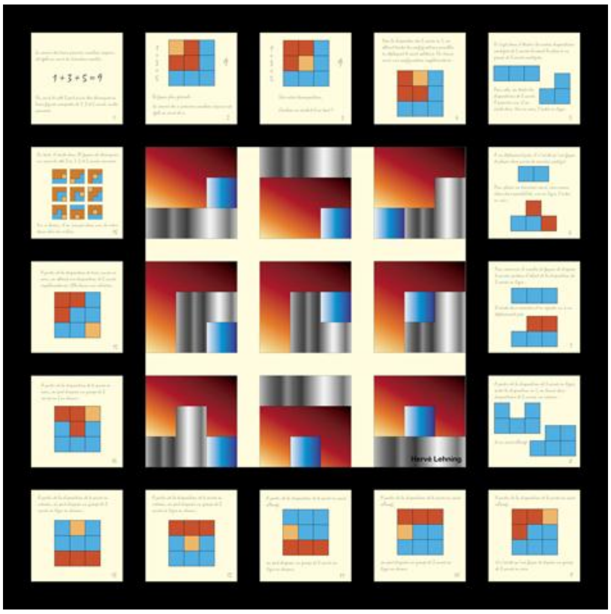

Figure 13 1 + 3 + 5 = 9 détaillé

Il commence avec une analyse de la décomposition d'un carré 3 par 3 en 1, 3 et 5 carrés adjacents. La configuration la plus simple est en haut à gauche de la Figure 14. En bougeant les pièces des puzzles, on trouve deux autres possibilités (en haut à droite et en bas à gauche).

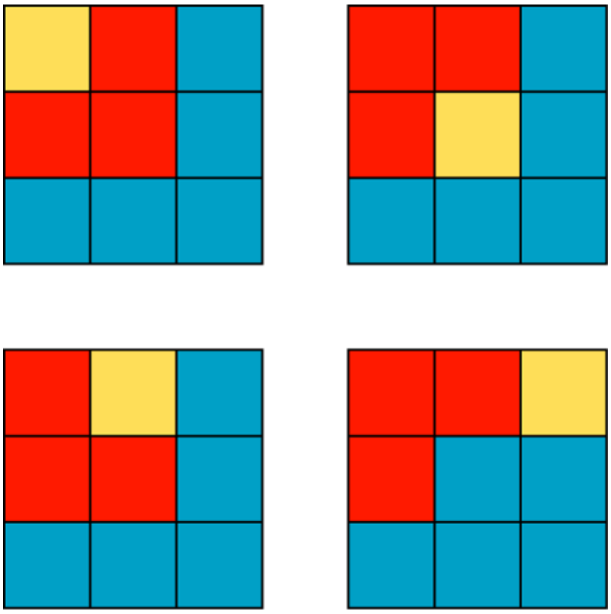

Figure 14 quatre possibilités

Après cela, nous devons changer la forme des pièces. Par exemple, la pièce de trois carrés prend deux formes, une ligne et un coin. En bougeant cette pièce et 1 carré, nous obtenons 10 possibilités (voir la Figure 13). L'une d'elles n'est pas sur la Figure 12.

4. Des mathématiques à l'art

Certaines preuves sans parole peuvent devenir des œuvres d'art à travers leur visualisation. C'est spécialement le cas avec le théorème de Pythagore :

Dans tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

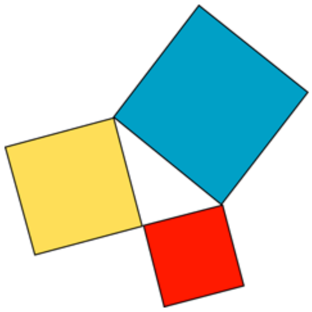

Figure 15 Théorème de Pythagore

C'est-à-dire : sur la Figure 15, l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres. Une façon de le démontrer est de diviser les trois carrés en pièces et de bouger les pièces des deux petits pour former le grand.

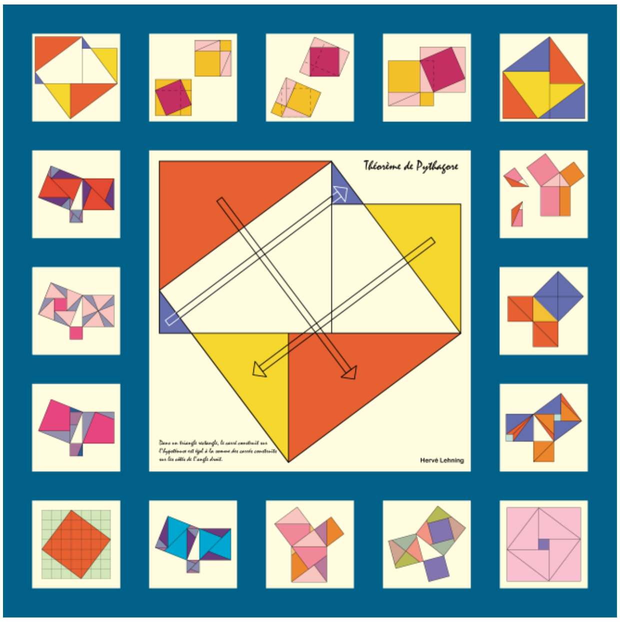

Figure 16 Théorème de Pythagore

La Figure 16 propose 16 preuves du théorème de Pythagore. La preuve dans le carré central est matérialisée par les flèches montrant comment bouger les pièces pour former le grand carré à partir des deux petits. Mises ensembles, ces preuves sans parole forment une œuvre d'art. Ainsi, les mathématiques peuvent être vues comme un art.

En 2000, une équation due à Leonhard Euler, un mathématicien du XVIII^e siècle, a été élue la plus belle formule du monde par les lecteurs du *Mathematical Intelligencer*. La voici :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Pour un mathématicien, la beauté de cette formule tient en la réunion de cinq des constantes mathématiques les plus importantes dans une équation très simple, mais intrigante, écrite avec juste une addition et une exponentielle. Ces constantes sont 0 et 1, les éléments neutres de l'addition et de la multiplication, i, l'unité imaginaire des nombres complexes, e et π, les deux nombres transcendants les plus importants.

Ce choix peut être résumé en la formule très simple suivante :

Profondeur + Simplicité = Beauté.

En hommage à la beauté de la formule d'Euler, inventée par le génie mathématique des Lumières, j'ai réalisé une lampe sur le sujet. Elle donne une preuve sans parole de la formule. Créer de beaux objets est une autre façon de populariser les maths à travers l'art (voir la Figure 17).

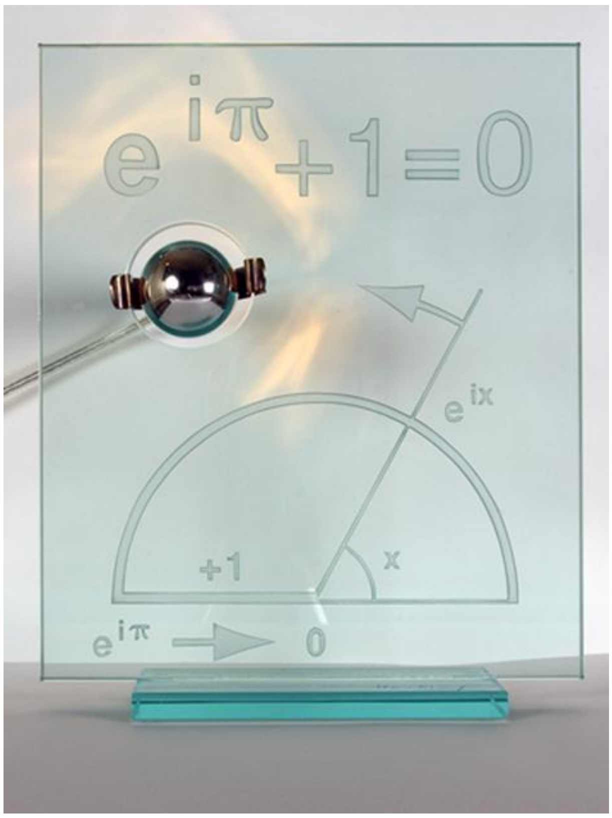

Figure 17 Formule d'Euler

Figure 18 L'équation du cœur

À cette occasion, j'ai réalisé que le verre grave est idéal pour mettre les équations en lumière, aussi, j'ai réalisé plusieurs modèles de lampes comme celle dont le nom est « l'équation du cœur », inspirée par une courbe nommée cardioïde.

5. L'art évoquant les mathématiques

Pour le mathématicien, certaines structures semblent avoir une origine mathématique. C'est le cas pour les taches des animaux (voir la Figure 5) ; mais quelles sont les mathématiques derrière ? La réponse n'est pas si facile. Les photographies peuvent être intrigantes. Dans le cas de la Figure 19 représentant un glaçon fondant sur une plage du Groenland, un poète pourrait voir deux oiseaux s'embrassant mais elle peut aussi évoquer une question topologique au mathématicien.

Figure 19 Glaçon fondant sur une plage

Conclusions

Dans ce papier, j'ai décrit des utilisations des visualisations en mathématiques et leurs aspects esthétiques. D'une part, les visualisations sont utiles pour mieux comprendre les mathématiques et pour améliorer notre intuition des objets mathématiques. D'autre part, les visualisations créées sont des œuvres d'art qui peuvent populariser les mathématiques et montrer leur beauté cachée.

Références

[1] Martin Kemp, *Visualization: The Nature Book of Art and Science*, University of California Press, 2000

[2] Hervé Lehning, From Experimentation to Proof. In *The American Mathematical Monthly*, Vol. 96, No. 7 (Aug. - Sep., 1989), pp. 631-635

[3] Hervé Lehning, Dynamics of Typical Continuous Functions. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 123, No. 6 (Jun., 1995), pp. 1703-1707

[4] Hervé Lehning, Computer-Aided or Analytic Proof? In *College Mathematics Journal*, Vol 21 (1990), pp. 228-239

[5] Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 1902

Crédits

Toutes les photographies, peintures et objets présentés dans ce papier ont été créés par l'auteur : Hervé Lehning.