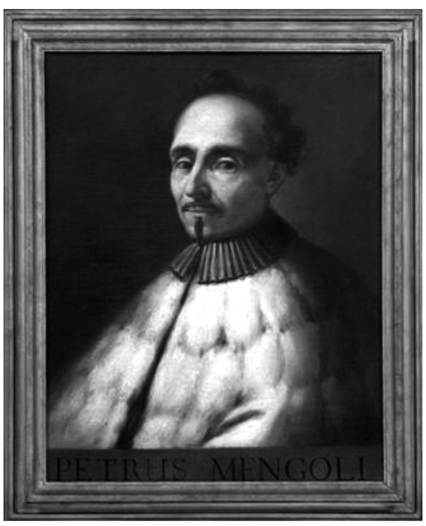
par Hervé Lehning

Zêta de deux,
zêta des nombres pairs

Le premier calcul exact de zêta de deux remonte à Leonhard Euler au XVIIIe siècle. Loin des démonstrations modernes, il s'inspire du calcul sur les racines d'un polynôme. Sa méthode peut toujours s'appliquer dans des occasions similaires, au moins sous la forme d'une heuristique.



Pietro Mengoli (vers 1626-1686).

Au XVII^e siècle, après avoir calculé les sommes des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+a)}$ pour a un nombre entier compris entre 1 et 10, Pietro Mengoli échoua pour… $a = 0$. Il posa alors le problème aux mathématiciens de son époque.

Cent ans plus tard, Leonhard Euler fut le premier à résoudre la question posée par celui qui fut l'élève de Cavalieri. Pour ce faire, il n'a utilisé aucune des méthodes couramment exposées dans les ouvrages d'aujourd'hui. Il a conjecturé le résultat à partir d'un calcul numérique, avant de le prouver rigoureusement en le liant aux calculs sur les fonctions symétriques des zéros d'un polynôme ! Sa méthode se justifie complètement, et elle est toujours exploitable dans des situations comparables, comme le calcul de la somme des carrés des inverses des zéros positifs de l'équation $\tan x = x$.

La méthode d'Euler

Euler part du constat que les nombres réels $n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$ sont les zéros de la fonction sinus. Il a alors l'idée, osée, de traiter cette fonction comme un polynôme. En fait, il s'agit d'une série entière :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Plus précisément, Euler considère la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(2n+1)!}$$

dont les zéros sont les nombres $(n\pi)^2$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Il en déduit que la somme de leurs inverses est égal à 1 / 6, et donc que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$. Rien que ça !

Ce raisonnement serait correct si la série ci-dessus était un polynôme (voir l'encadré *Calcul sur les zéros d'un polynôme*).

Le calcul d'Euler est justifié si l'on considère les zéros du polynôme

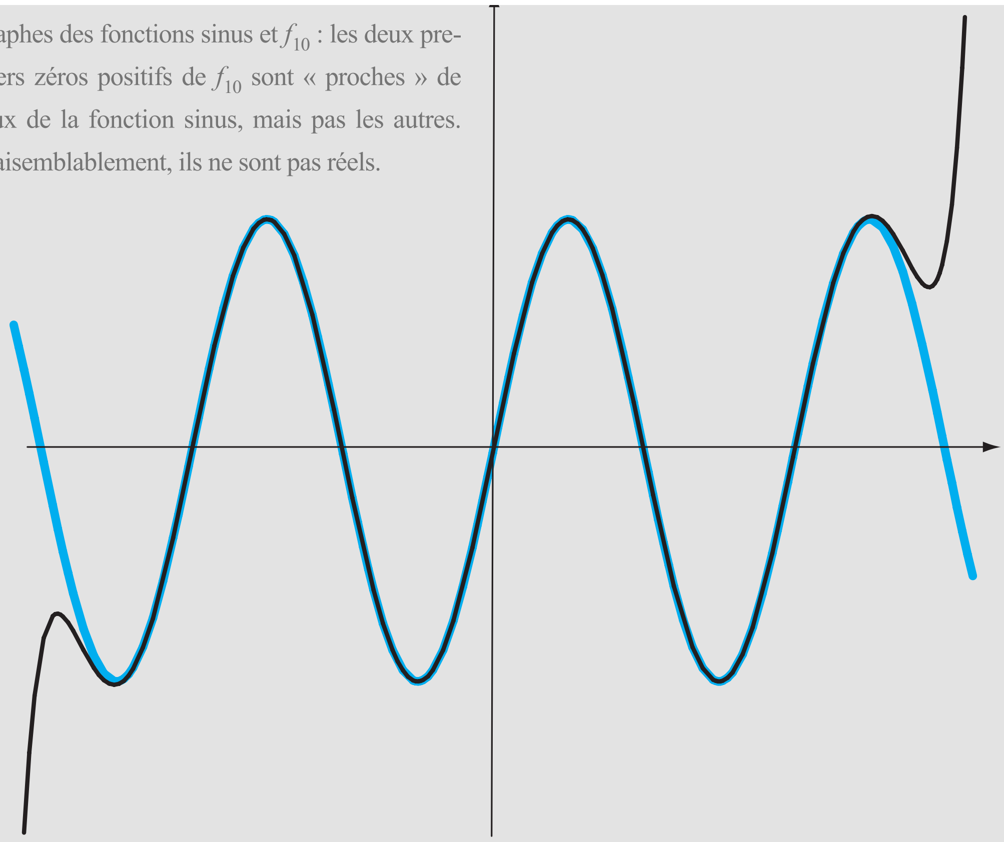
$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Plus précisément, si l'on note $\pm x_{1,n}, \pm x_{2,n}, \ldots, \pm x_{n,n}$ ses zéros non nuls, les relations entre les coefficients et les zéros d'un polynôme fournissent la relation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k,n}^2} = \frac{1}{6}.$$

On peut se douter que ces zéros sont « proches » de ceux de la fonction sinus, c'est-à-dire des nombres $k\pi$, mais cette idée de proximité a besoin d'être précisée. En fait, si nous traçons le graphe du polynôme f_n, cela ne se passe que pour les tout premiers zéros :

Graphes des fonctions sinus et f_{10} : les deux premiers zéros positifs de f_{10} sont « proches » de ceux de la fonction sinus, mais pas les autres. Vraisemblablement, ils ne sont pas réels.



Certains zéros de f_n ne sont vraisemblablement pas réels. Une étude de la convergence de f_n et de f_n' permet de préciser cette question. Pour la mener, il suffit d'utiliser une majoration naturelle :

$$|\sin x - f_n(x)| \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$\leqslant \frac{A^{2n+3}}{(2n+3)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{A}{2n+3}\right)^{2k}$$

$$= \frac{A^{2n+3}}{(2n+3)!} \times \frac{1}{1-\left(\frac{A}{2n+3}\right)^2}$$

valable si $|x| \leqslant A < 2n+3$,

et la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

On démontre alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n \sup_{x\in B_n} |\sin x - f_n(x)|\right) = 0.$$

De même, $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in B_n} |\cos x - f_n'(x)|\right) = 0$

où B_n est l'ensemble des x de module inférieur ou égal à $2n/e$.

Pour éviter des expressions trop lourdes, notons m la partie entière de $2n/e\pi$ de sorte que, si $|k| \leqslant m$, alors $k\pi \in B_n$. Nous considérons alors $0 < \varepsilon < 1$ et un entier N tels que les deux quantités

$$n \sup_{x\in B_n} |\sin x - f_n(x)| \quad \text{et} \quad \sup_{x\in B_n} |\cos x - f_n'(x)|$$

soient inférieures à ε si $n \geqslant N$.

Grâce à la première de ces majorations, on montre que f_n change de signe entre $k\pi - \pi\frac{\varepsilon}{n}$ et $k\pi + \pi\frac{\varepsilon}{n}$. La seconde majoration permet d'affirmer que f_n' ne change pas de signe. On en déduit que f_n a un seul zéro entre ces deux points, et qu'il est simple. Ainsi, nous

Calcul sur les zéros d'un polynôme

Si x_1 et x_2 sont les deux zéros du trinôme $a + bx + cx^2$, on peut écrire :

$$a + bx + cx^2 = c\,(x - x_1)\,(x - x_2).$$

En développant ce produit, on obtient en particulier :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Si $a \neq 0$, aucun des zéros n'est nul et leurs inverses sont racines de l'équation $a + b\frac{1}{x} + c\frac{1}{x^2} = 0$ et donc zéros du trinôme $c + bx + ax^2$.

On en déduit que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{a}$

Les calculs se mènent de façon identique si x_1, x_2, …, x_n sont les zéros du polynôme $a + bx + cx^2 +$ etc. $= 0$, où $a \neq 0$.

On trouve alors : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = -\frac{b}{a}$.

obtenons les zéros $\pm x_{1,n}, \pm x_{2,n}, \ldots, \pm x_{m,n}$ à condition de convenir de les noter en premiers.

Ils vérifient $|x_{k,n} - k\pi| \leqslant \dfrac{\pi\varepsilon}{n}$,

d'où l'on déduit : $\left|\dfrac{1}{x_{k,n}^2} - \dfrac{1}{k^2\pi^2}\right| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{k^3\pi^3}$

et donc $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{x_{k,n}^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2\pi^2}\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\pi^3}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3}$.

Le calcul du départ fournit

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{x_{k,n}^2} = \frac{1}{6} - \sum_{k=m+1}^{2} \frac{1}{x_{k,n}^2}$$

d'où l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3} + \sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{|x_{k,n}|^2}.$$

Si les zéros de f_n (autres que les m premiers ci-dessus) sont hors de B_n, on en déduit que :

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{\left|x_{k,n}^2\right|} \leqslant \frac{e^2}{4}\,\frac{n-m}{n^2} \leqslant \frac{e^2}{4n}.$$

Donc, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}.$$

Ceci étant vrai pour $0 < \varepsilon < 1$, on en déduit le résultat, qui se trouve ainsi entièrement établi si l'on admet que f_n n'a pas de zéro complexe (non réel) dans B_n. Le raisonnement précédent allié aux calculs faits dans l'encadré *Zéros de la fonction sinus* montre que les zéros de f_n sont situés dans les boules de centre $k\pi$ et de rayon ε/n. À l'aide de la dérivée de f_n, nous montrons alors que c'est impossible.

Euler en déduit également la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9\,450}$$

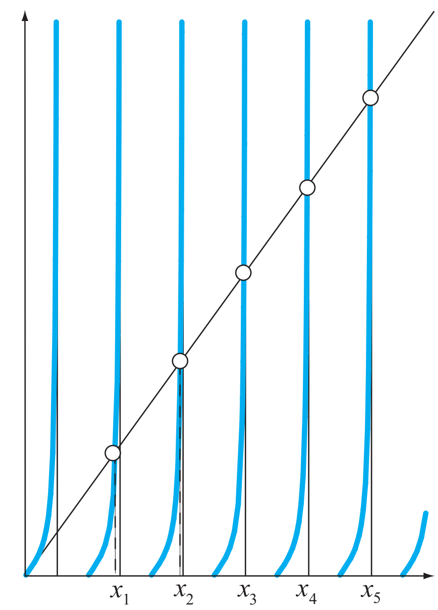
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93\,555} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638\,512\,875}$$

(voir l'encadré *Un calcul de Newton*).

La méthode d'Euler est utilisable dans d'autres circonstances, par exemple dans l'étude de séries liées aux zéros de l'équation $\tan x = x$.

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto \tan x - x$x suffit pour montrer que les zéros (strictement) positifs de l'équation $\tan x = x$ forment une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ strictement croissante.

De plus, pour tout n, $n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$.



Tracés des courbes d'équations $y = x$ (en noir) et $y = \tan x$ (en bleu). En utilisant les variations de la fonction différence, on démontre que l'équation $\tan x = x$ possède une racine unique x_n sur chaque intervalle de longueur $r/2$ commençant en nr.

On peut préciser davantage l'approximation de xn. On trouve alors :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

(voir l'encadré *Un développement asymptotique*).

Zéros de la fonction sinus

Sur $\mathbb{C}$, la fonction sinus est définie par sa série entière. On en déduit facilement que les formules d'addition restent valables, et donc que

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x.$$

Ainsi, $\sin(x + iy) = 0$ si, et seulement si, $\sin x = 0$ et $\operatorname{sh} y \cos x = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\sin x = 0 \text{ et } \operatorname{sh} y = 0.$$

On en déduit que les seuls zéros de la fonction sinus sont les éléments de $\pi\mathbb{Z}$.