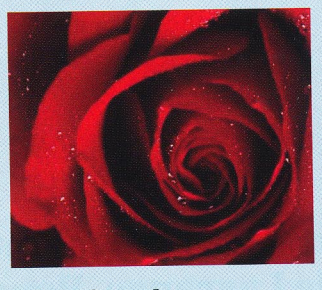
La migration des nombres vers le bonheur



Mutations

Chaque année, au royaume du Gehlinguiskhan, les nombres sont transformés en la somme des cubes de leurs chiffres, le jour de l'équinoxe de printemps. Ainsi, 145 devient : $1^3 + 4^3 + 5^3 = 190$.

Malgré la joie populaire lors des mutations annuelles, cette transformation est accompagnée d'une grande souffrance pour les nombres. Le bonheur des nombres est d'éviter une errance infinie sans repos. Par exemple, sept, le nombre très saint, se transforme successivement en :

7, 343, 118, 514, 190, 730, 370, 370, ...

Une fois arrivé à 370, il ne mute plus. Il atteint donc le bonheur en six transformations. Il s'agit d'un nombre bienheureux. De même, deux et trois sont bienheureux :

2, 8, 512, 134, 92, 737, 713, 371, 371, ...

3, 27, 351, 153, 153, ...

Les points fixes du bonheur

La migration des nombres heureux finit toujours sur un point fixe, c'est-à-dire un nombre se transformant en lui-même. Étrangement, il n'en existe que six, les voici :

0, 1, 153, 370, 371, 407.

Ce résultat est beaucoup plus facile à démontrer qu'on pourrait le penser. L'essentiel est de réaliser qu'un nombre à cinq chiffres est supérieur à 10 000 et la somme des cubes de ses chiffres inférieure à 5.9^3. S'il est fixe, cela implique l'inégalité absurde :

$$10\,000 \leq 3\,645.$$

Il en est de même s'il a plus de cinq chiffres (voir l'encadré *Une majoration*). Une recherche exhaustive à l'aide d'un ordinateur permet alors de trouver tous les points fixes. Le bonheur ne peut être atteint qu'en passant par l'un de ces six nombres. Un recensement exhaustif des dix mille premiers nombres montre que le bonheur est majoritaire : plus de quatre vingt pourcents des nombres sont heureux !

Les cycles du malheur

Certains pourtant sont malheureux, le nombre quatre par exemple, puisque voici ses mutations :

4, 64, 280, 520, 133, 55, 250, 133, ...

La règle de formation de la suite implique qu'après ce second 133, les mutations se reproduisent à l'identique : 55, 250, 133. Cela indéfiniment. Ainsi, aucun des nombres de la liste ci-dessus n'est heureux car toute suite commençant par l'un d'eux finit dans le même cycle du malheur. Tout nombre malheureux finit-il dans un cycle ? Certains peuvent-ils être victimes d'une errance infinie ?

L'infinie errance

Heureusement, un tel sort est impossible. En effet, si un nombre a plus de cinq chiffres, la somme des cubes de ses chiffres lui est strictement inférieure (voir l'encadré *Une majoration*). Ainsi, même après une longue errance, les mutations ramènent toujours le nombre parmi ceux n'ayant qu'au plus quatre chiffres. Et cela indéfiniment. Comme ils sont en nombre fini, les mutations ne peuvent être toutes distinctes. Deux, au moins, sont égales. Le phénomène du paragraphe précédent se reproduit alors : les mutations sont identiques après ces deux-là. Les migrations forment donc un cycle et ces cycles sont en nombre fini.

En fait, il n'existe que deux cycles d'ordre deux : 136, 244 et 919, 1459, deux d'ordre trois 55, 250, 133 et 160, 217, 352 et aucun autre. Pour le démontrer, le plus simple est de faire un essai exhaustif des nombres à moins de quatre chiffres. Le malheur se résume donc à ces quatre cycles et le bonheur à six points fixes.

Une majoration

Supposons qu'un nombre N ait p chiffres, la somme des cubes de ses chiffres vérifie : $S \leq 9^3 p$.

Comme $N \geq 10^{p-1}$, l'inégalité $\frac{10^p}{p} > 7\,290$ implique $S < N$. Or, il est facile de montrer que la suite des termes $\frac{10^p}{p}$ est croissante, comme cette quantité dépasse 7 290 pour $p = 5$, on en déduit que $S < N$ si N a plus de cinq chiffres.