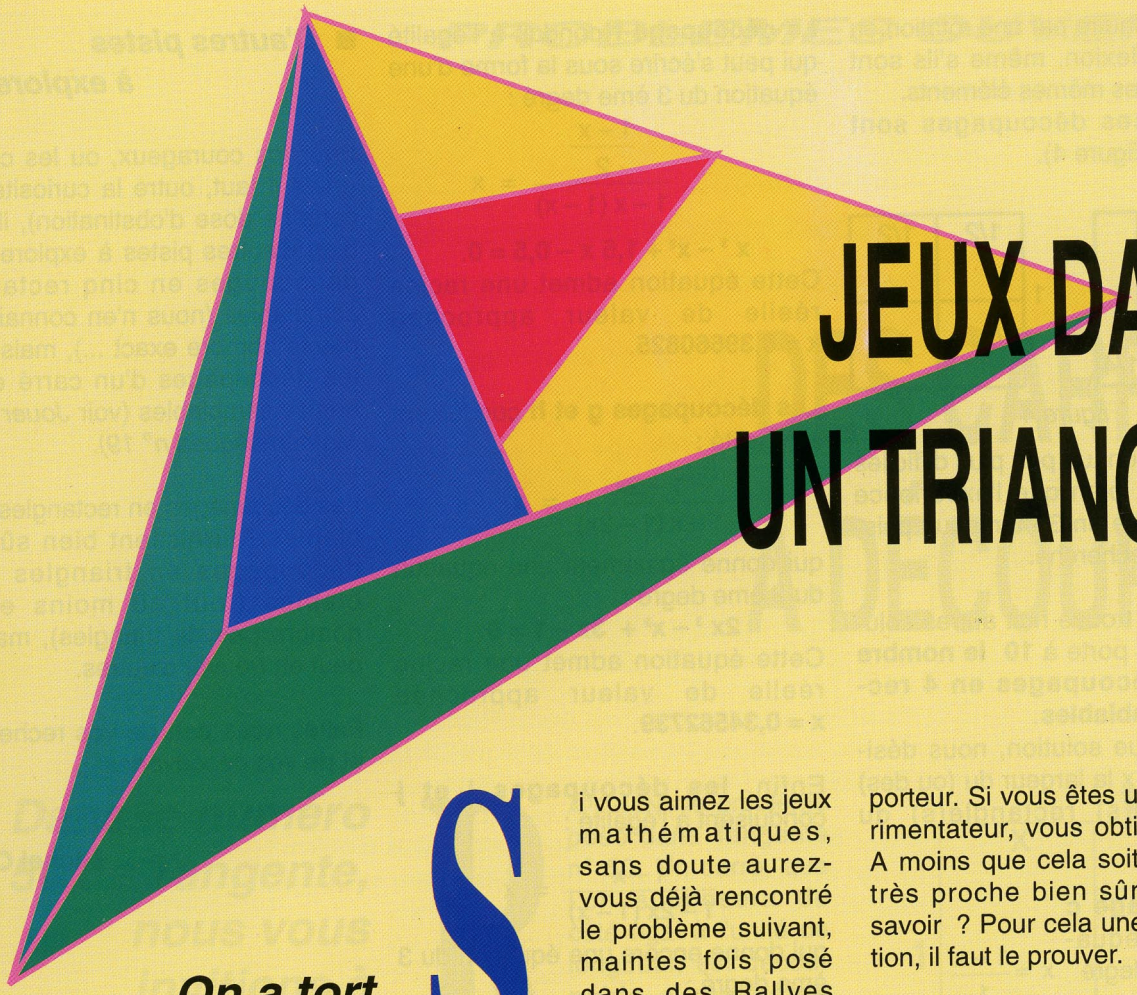


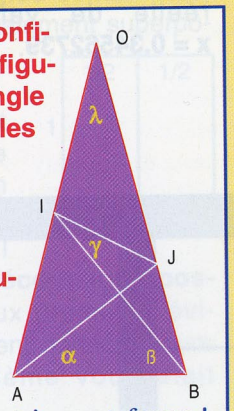
JEUX DANS UN TRIANGLE

On a tort d'opposer les mathématiques dites «sérieuses» aux jeux mathématiques. Les deux font partie d'un ensemble en étroite osmose où tout ce qui concerne les unes peut enrichir les autres. Démonstration à propos de jeux autour d'un triangle.

Si vous aimez les jeux mathématiques, sans doute aurez-vous déjà rencontré le problème suivant, maintes fois posé dans des Rallyes Mathématiques :

On donne la configuration de la figure 1 où le triangle est isocèle et les angles $\lambda=20°$, $\alpha=60°$ et $\beta=50°$ sont donnés.

Il s'agit de trouver la valeur de γ.



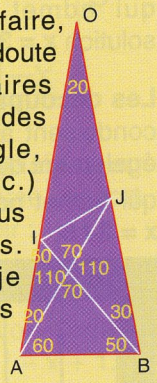
Attention, la figure est volontairement fausse !

La configuration étant entièrement déterminée, il est clair que cette valeur l'est également.

■ Avec un rapporteur

Votre première réaction sera sans doute de partir à la recherche d'un crayon, d'une règle et d'un rapporteur. Ensuite, vous essayerez de faire le dessin le plus précis possible (donc à l'opposé de celui de la figure 1). A ce moment, il vous suffira de mesurer à l'aide du rapporteur. Si vous êtes un bon expérimentateur, vous obtiendrez 80°. A moins que cela soit un nombre très proche bien sûr. Comment savoir ? Pour cela une seule solution, il faut le prouver.

Pour essayer de le faire, vous utiliserez sans doute les relations angulaires classiques (somme des angles d'un triangle, angles opposés, etc.) pour déterminer le plus d'angles possibles. Personnellement, je parviens aux résultats de la figure ci-contre.

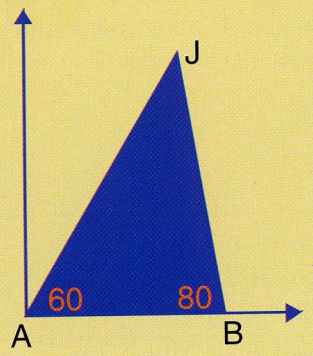


Quoique vous fassiez, vous n'arriverez pas à atteindre l'angle cherché de cette façon. Il reste pourtant que cet angle est bien entièrement déterminé.

■ Un calcul pénible mais sûr

Une idée aboutissant à des calculs bien plus systématiques est de se dire que, si cet angle est déterminé, ses lignes trigonométriques le sont également. De plus, elles se prêtent autrement mieux au calcul. C'est pénible et manque d'élégance mais c'est sûr. Il s'agit d'un véritable programme devant aboutir à

une preuve. De plus, ce programme est sans doute le plus économique en temps. En géométrie, la beauté coûte cher. C'est donc décidé, pour parvenir au résultat, nous allons suivre la voie de la géométrie analytique.

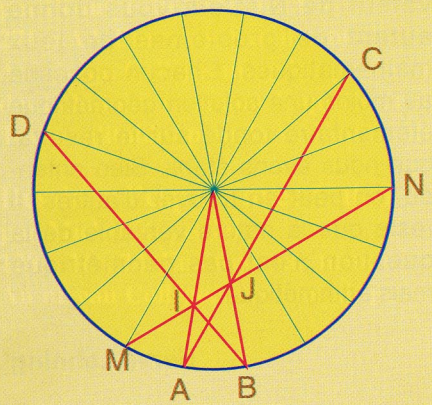


Nous nous plaçons donc dans un repère orthonormal d'origine , d'axe des abscisses. En écrivant que J est à l'intersection des droites AJ et BO, on montre (voir encadré) le résultat conjecturé.

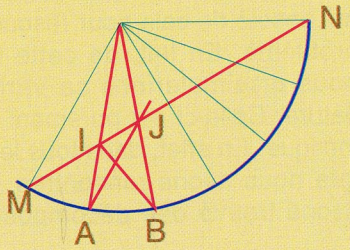
Du point de vue logique, rien à redire. Cependant, il est difficile de se sentir complètement satisfait. Pourquoi ? Simplement parce qu'il reste le sentiment que ce résultat doit avoir une justification plus profonde que cette simple vérification calculatoire.

■ Une preuve éclairante

La notion d'angle est intimement liée aux cercles. Ce n'est pas notre ami le cercle trigonométrique qui nous contredira. Il est possible d'en construire plusieurs ici.
Par exemple celui de centre O passant par A et B. On arrive vite à la figure suivante :
Si on construit le polygone régulier de centre O et d'angle au centre AOB, on s'aperçoit que la droite IJ semble couper le cercle en deux points du polygone M et N. De même AJ et BI en C et D.
Admettons que nous ayons réussi à le prouver. En utilisant les relations dans le triangle OIN, nous trouvons :
OIN = 180 – ONM – ION.
Or, en utilisant les angles au centre ainsi que les angles inscrits :
ONM = 30 et ION =100 donc OIN=50. On en déduit le résultat (voir figure 2).



Il reste donc à prouver que la droite IJ coupe effectivement le cercle en Met N. Nous pouvons oublier les points C et D puisqu'ils n'interviennent pas pour démontrer le résultat final.
Il s'agit donc de montrer que les points du polygone M et N et les points I et J sont alignés. Pour cela, on constate d'abord que le triangle OAJ est isocèle (angles en O et A égaux à 30°) donc OJ=JA.
D'autre part, JA=JB' par symétrie donc OJ=JB' d'où l'on déduit que J appartient à la médiatrice de OB' c'est-à-dire à MN. Enfin, IMA=IBA=50° (symétrie) et de même NMA=50° (angle inscrit). Il en résulte que I appartient à MN.
Nous avons donc démontré que les quatre points M, N, I et J sont alignés. Le résultat s'ensuit.
Cette démonstration est bien plus éclairante puisqu'elle montre un lien entre le problème et les polygones réguliers. De plus, elle est susceptible de généralisation.



LA DÉMONSTRATION TRIGONOMÉTRIQUE

Les coordonnées de J sont solutions du système $\begin{cases} x \sin 60 - y \cos 60 = 0 \\ x \sin 80 + y \cos 80 = \sin 80 \end{cases}$

On en déduit :

$$x_J = \frac{\sin 80 \cos 60}{\sin 40} \text{ et } y_J = \frac{\sin 80 \sin 60}{\sin 40}$$

D'autre part, puisque le triangle est isocèle, $x_J = \cos 80$ et $y_J = \sin 80$. La pente de IJ est donc :

$$\frac{\sin 80 \sin 60 - \sin 80 \sin 40}{\sin 80 \cos 60 - \cos 80 \sin 40}$$

Or, $\gamma = 80°$ si et seulement si cette pente vaut tan(30°). C'est vrai si et seulement si :
sin80sin60cos30–sin80cos30sin40
=sin80cos60sin30–cos80sin40sin30

En utilisant les formules d'addition, on montre que cette dernière égalité équivaut à :
sin80 sin30 = sin40 sin50
et donc à : cos50 – cos110 = cos10 – cos 90.
Or cos90 = 0 et cos11 = –cos70, donc cela équivaut à 2 cos60 cos10 = cos10 ce qui est vrai car cos60 = 1/2. **CQFD.**

■ Généralisation

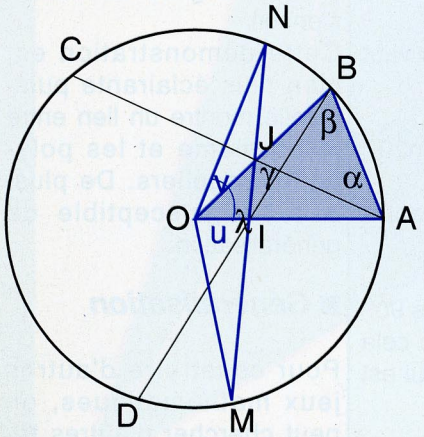
Pour construire d'autres jeux mathématiques, on peut chercher d'autres triangles de ce type c'est-à-dire tels que les mesures en degré des angles α, β, λ et γ soient des nombres rationnels. Pour en déterminer de bons candidats, nous pouvons essayer pour certaines valeurs de α, β et λ de déterminer numériquement la valeur correspondante de γ en utilisant une formule trigonométrique du type de celle que l'on a établi précédemment dans notre cas particulier.

Nous obtenons une formule trop longue et trop laide pour que nous la reproduisions ici. Avec l'aide d'un Logiciel de Calcul Symbolique, nous pouvons alors déterminer des cas semblant convenir. Par exemple, en faisant une recherche exhaustive des cas où α, β et λ sont entiers (il y en a plus de 100000 mais avec un ordinateur, ce type de recherche est possible), nous trouvons entre autres λ=12, α=42, β=30 et alors γ=48.
Nous essayons alors de le démontrer en essayant d'appliquer le même raisonnement. Hélas, si les points C et D sont bien encore sur le polygone prévu, les points M et N ne le sont plus.

Or, ce sont ces points qui nous ont servi pour notre démonstration. Nous aurions pu nous arrêter là. Cependant, si cet échec montre que notre méthode ne se généralise guère, elle nous renforce dans l'idée d'un lien avec les polygones réguliers de 2N côtés.

D'autre part, en utilisant les angles inscrits et les relations dans le triangle, on établit une relation angulaire intéressante (voir ci-dessous).

$$u + v = \lambda + 2\gamma - 2\beta$$



Pour une valeur entière N, appelons Ω la rotation de centre O et d'angle ω=180/N. Si on note U et V et les rotations de centre O et d'angles u et v, cette relation s'écrit également $U o V = W^{c+l-b}$ où a, b, c et l sont définis par :

$\lambda = \omega\, l$, $2\alpha = \omega\, a$, $2\beta = \omega\, b$, $2\chi = \omega\, c$.

En posant $A_0 = A$, $A_1 = \Omega\,(A_0)$, et ainsi de suite, $A_{i+1} = \Omega\,(A_i)$, on parvient à la justification du résultat si et seulement si 16 des A_i admettent le point O pour centre de gravité. Il s'agit des points d'indices :

l, –b, a, a–b–l, c+2 l–b, c+l–2b, a+l+c–b, a+c–2b, N, N+a+l, N+c–l–b, N+a+c–b, N+l–b, N+a+2l–b, N+c–2b, N+a+l+c–2b.

Nous vous faisons grâce de la démonstration qui porte sur des compositions de rotations (on pourrait aussi raisonner sur les complexes).

D'autre part, on montre en reprenant les calculs à l'envers que s'il en est ainsi alors on a bien $2\chi = \omega\, c$ lorsque $2\alpha = \omega\, a$, $2\beta = \omega\, b$, $\lambda = \omega\, l$.

16 PROBLEMES DE JEUX MATHÉMATIQUES

λ	α	β	γ	**décomposition des seize points**
12 20 36	48 50 54	12 20 36	**54** **60** **72**	8 couples de points symétriques
12 20 20 20 72 72	72 60 65 70 48 51	42 30 25 50 42 39	**108** **80** **85** **110** **66** **81**	5 couples de points symétriques 3 triangles équilatéraux
12 12	57 69	33 21	**75** **87**	4 couples de points symétriques 1 triangle équilatéral 1 pentagone régulier
72 72	39 42	21 24	**48** **54**	2 couples de points symétriques 4 triangles équilatéraux
12 12	42 66	18 42	**48** **96**	2 triangles équilatéraux 2 pentagones réguliers
60/7	390/7	330/7	**480/7**	3 triangles équilatéraux 1 heptagone régulier

Appliquons ce résultat à notre problème initial. Dans ce cas, N=9. Les seize points se décomposent en cinq couples de points symétriques (A_0,A_9), (A_5,A_{14}), (A_7,A_{16}), (A_1,A_{10}), (A_4,A_{13}) et deux triangles équilatéraux (A_3,A_9A_{15}), (A_2,A_8,A_{14}). Pour le démontrer, nul n'est besoin d'un dessin. Il suffit de compter les intervalles entre les indices.

Dans l'autre cas, N=15. Nous trouvons deux triangles équilatéraux et deux pentagones réguliers ce qui prouve le résultat.

■ *Un problème d'arithmétique*

Ces deux essais expliquent pourquoi nous ne décrirons pas l'ensemble de ces seize points en termes de géométrie élémentaire bien que cela soit possible.

Nous ne le ferons pas car il n'est nul besoin de cela pour résoudre le problème. En fait, de cette façon nous dissimulerions sa véritable nature. Celle-ci est purement arithmétique. En effet, dans tous les cas que nous avons rencontrés, nous avons trouvé des décompositions de l'ensemble des seize points en couples de points symétriques, triangles équilatéraux, pentagones réguliers. Dans chacun des cas, pour le prouver, il suffit de compter les intervalles entre les indices des points. En le cherchant, nous avons également trouvé un heptagone mais ni polygones à onze ou treize côtés. Cela ne signifie pas que l'on ne puisse pas en trouver, vous pouvez les chercher. Cela ne signifie pas non plus que l'on ne puisse pas trouver seize points dont le centre est O mais ne se décomposant pas ainsi. Une telle recherche nous emmenrait très loin du côté de l'arithmétique.

Pour l'instant, le tableau ci-dessus montre quelques cas rencontrés. Vous pourrez le compléter par la valeur de N. Cela vous donne autant de problèmes de jeux mathématiques. Chacun possède au moins une solution géométrique élémentaire fondé sur le résultat que nous avons établi. Bien entendu, on peut en trouver d'autres. Il reste que la nature véritable de la question n'est pas géométrique mais arithmétique.

Hervé Lehning