Les phrases qui se racontent

par Hervé Lehning

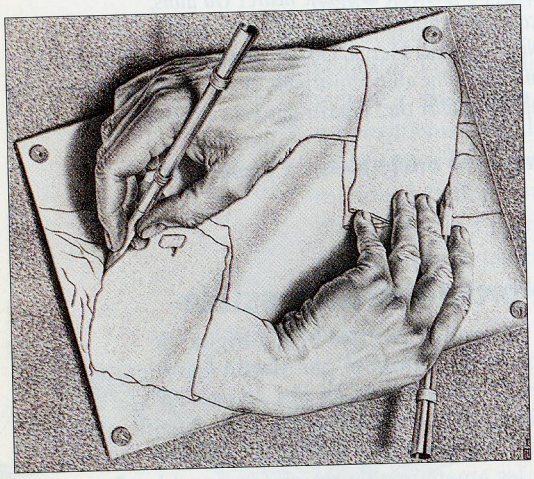
L'autoréférence est à la source des plus beaux paradoxes logiques. Ce principe est également à l'origine d'adorables petits casse-tête mathématiques. Pour les résoudre, une méthode de choix : les approximations successives. Les solutions qu'elle permet d'obtenir soulèvent d'autres questions.

Hervé Lehning est professeur de mathématiques spéciales au lycée Janson de Sailly (Paris) et rédacteur en chef de la revue *Sciences & infos prépas*.

Vous voulez fabriquer un paradoxe ? Pensez à l'autoréférence. C'est de la dynamite logique ! L'exemple premier, et sans doute le plus célèbre, nous vient de la Grèce antique. Il s'agit de la phrase suivante :

« Cet énoncé est faux ».

N'en supprimez pas les guillemets car si vous entrez dans cette phrase, vous n'en sortirez pas ! En effet, est-il vrai ou est-il faux ? Supposons qu'il soit vrai, alors il est faux et donc il est vrai, etc. Le programme « boucle ». Il n'y a plus qu'à débrancher l'ordinateur. Heureusement, notre cerveau est équipé d'un métaprocesseur qui lui permet de sortir de la boucle infernale sans provoquer de trop gros dommages.



Drawing Hands, M.C. Escher
(Cliché Cordon Art, Baarn, Pays Bas)

Cette idée de boucle, développons-la sur un jeu mathématique, proposé récemment lors d'un rallye mathématique : le jeu des consonnes. Il s'agit de compléter la phrase suivante par un nombre écrit en toutes lettres et qui la rende exacte :

Cette phrase contient _____ consonnes.

Une façon *a priori* stupide de résoudre le problème est d'écrire une phrase qui décrive la phrase ci-dessus. Comme elle contient 18 consonnes, nous obtenons :

Cette phrase contient dix-huit consonnes.

Faux, bien entendu, puisque le nombre de consonnes a été modifié. Nous la corrigeons donc en recommençant, nous obtenons successivement :

Cette phrase contient vingt-deux consonnes.
Cette phrase contient vingt-quatre consonnes.
Cette phrase contient vingt-cinq consonnes.
Cette phrase contient vingt-cinq consonnes.

Les deux dernières phrases sont identiques. Comme la seconde décrit la première, elles sont exactes ! Nous avons donc résolu le problème posé avec nos écritures *a priori* fausses. Cette méthode magique est bien connue de tous les scientifiques. Il s'agit de la méthode des approximations successives.

Poursuivons avec un jeu célèbre d'une facture comparable au précédent : le jeu de Robinson. Il fut inventé dans les années soixante-dix par Raphaël Robinson, un mathématicien américain[1]. Le but est de remplir les blancs de la phrase suivante afin qu'elle devienne vraie :

Dans cette phrase, il y a :
__ 0, __ 1, __ 2, __ 3, __ 4, __ 5, __ 6, __ 7, __ 8, et __ 9.

Appliquons la méthode des approximations successives. Nous obtenons successivement :

1 0, 1 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9
1 0, 11 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9
1 0, 12 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9
1 0, 11 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9
1 0, 11 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9

Les deux dernières lignes étant égales, nous avons trouvé la solution suivante au jeu de Robinson :
Dans cette phrase, il y a :
1 0, 11 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, et 1 9.

Existe-t-il d'autres solutions ? Pour répondre à cette question, nous remarquons d'abord que toute solution peut être trouvée par la méthode des approximations successives. Bien entendu, il est nécessaire de modifier la phrase initiale. Pour en être persuadé, imaginez seulement que vous partiez d'une solution, vous l'obtiendriez forcément. Cette remarque peut sembler peu constructive puisqu'elle suppose une solution trouvée. En fait, son intérêt est de limiter notre étude aux « suites qui se racontent ».

Ces suites sont entrées un jour dans ma vie (pour ne plus en sortir) au moyen d'un autre jeu mathématique. Il y a dix ans environ, un ami me demanda :
« *Si une suite commence par*
0, 10, 1110, 3110, 132110, 13123110,
quel est le nombre suivant ? »
Ma réponse (après réflexion) fut : « *23124110* »
Explication :
- dans 0, je compte « un 0 », ce que j'écris 10 ;
- dans 10, je compte « un 1, un 0 », ce que j'écris 1110 ;
- dans 1110, je compte « trois 1, un 0 », ce qui donne 3110 ;
- dans 3110, je compte « un 3, deux 1, un 0 », ce qui donne 132110 ;
- dans 132110, je compte, en totalisant les chiffres identiques que j'ordonne en décroissant, « un 3, un 2, trois 1, un 0 » ; etc.

J'aurais pu m'arrêter là mais, allez savoir pourquoi, je continuai : 1413223110, 1423224110, 2413323110, 1433223110, 1433223110. La suite est donc constante à partir de ce terme. Le résultat me sembla surprenant, c'est pourquoi j'essayai d'autres valeurs initiales. J'avais beau examiner un grand nombre de valeurs, je trouvais toujours une suite périodique, la période étant 1, 2 ou 3. Très vite convaincu de ce résultat, je tentai de prouver ce qui était devenu une conjecture. Après plusieurs mois de recherche, je trouvai 109 points fixes, 31 cycles de période 2 et 10 cycles de période 3 (*voir encadré*).

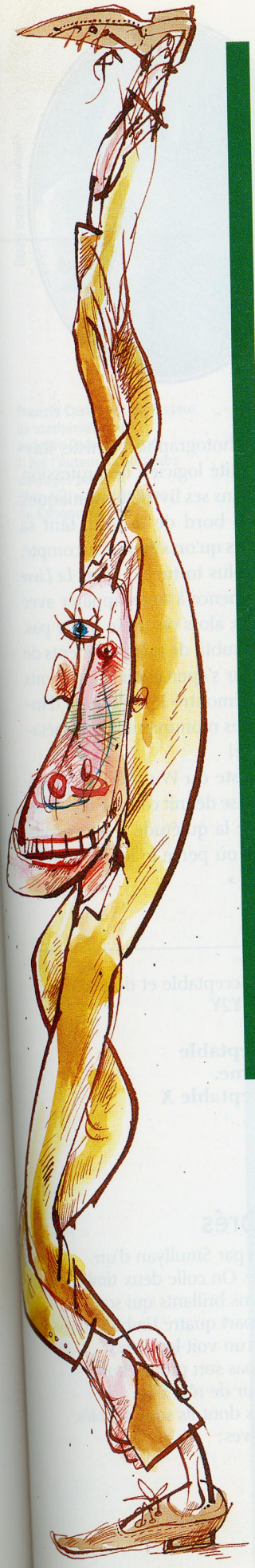
Les points fixes utilisant les dix chiffres donnent les solutions au jeu de Robinson. Il y a donc une autre solution : « *Dans cette phrase, il y a 1 0, 7 1, 3 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, et 1 9.* » Les autres points fixes fournissent des solutions à un jeu de Robinson légèrement modi-

(1) D. Hofstadter, *Ma Thémagie*, InterEditions, Paris, 1988.

(2) H. Lehning, « Computer-Aided or Analytic Proof ? », *The College mathematics Journal*, volume 21, number 3, 1990

(3) H. Lehning, « Quelle est la meilleure preuve ? », *Quadrature*, 11, 1992.

(4) http://perso.cybercable.fr/lehning/



fié, où certains chiffres peuvent être supprimés. Par exemple : « *Dans cette phrase, il y a 3 1, 2 2, 3 3, 1 4 et 1 5.* »

L'existence de cycles d'ordre deux m'a fait proposer une généralisation : « le jeu de Robinson à deux ou trois phrases ». Le but est de remplir les blancs des deux phrases suivantes afin qu'elles deviennent vraies :

Phrase A : dans la phrase B, il y a
__ 0, __ 1, __ 2, __ 3, __ 4, __ 5, __ 6, __ 7, __ 8, et __ 9.
Phrase B : dans la phrase A, il y a
__ 0, __ 1, __ 2, __ 3, __ 4, __ 5, __ 6, __ 7, __ 8, et __ 9.

Les solutions correspondent aux cycles d'ordre deux des suites qui se racontent. Un seul comporte tous les chiffres et fournit une solution complète. Il s'agit de :
Phrase A : dans la phrase B, il y a 1 0, 7 1, 4 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, et 1 9.
Phrase B : dans la phrase A, il y a 1 0, 8 1, 2 2, 1 3, 2 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, et 1 9.

De même, nous pouvons obtenir des solutions du jeu de Robinson à trois phrases mais aucune avec tous les chiffres. Nous trouvons, par exemple :
Phrase A : dans la phrase C, il y a 1 0, 4 1, 4 2, 1 3, 1 4, 2 5 et 1 6.
Phrase B : dans la phrase A, il y a 1 0, 5 1, 2 2, 1 3, 3 4, 1 5 et 1 6.
Phrase C : dans la phrase B, il y a 1 0, 5 1, 2 2, 2 3, 1 4, 2 5 et 1 6.
Il peut paraître étrange qu'il n'existe pas de solutions au jeu de Robinson à quatre phrases ou plus. C'est pourtant ce que démontre le résultat sur les suites qui se racontent. Tout ceci se généralise sans grande difficulté aux cas d'autres bases de numération.

Cette utilisation de la méthode des approximations successives pour résoudre des jeux autoréférents est-elle fortuite ? Pour répondre, nous sommes amenés à nous poser cette autre question : quel est l'usage habituel de cette méthode ? Son utilité principale est la résolution d'équations écrites sous la forme $f(x) = x$, autrement dit la recherche de points fixes de la fonction f. Ici, nous sommes précisément dans cette situation : x est une assertion et f une transformation d'assertion. Les suites d'assertions rencontrées sont donc des cas particuliers de systèmes dynamiques, un sujet très étudié de nos jours et l'on sait qu'il mène parfois au chaos. Mais nous ouvrons ici la porte sur un tout autre jeu.

A
Consonnes ?

Compléter la phrase suivante par un nombre écrit en toutes lettres et qui la rende exacte :
Cette phrase contient _____ consonnes de plus que de voyelles.

B
Le vrai et le faux

Combien le cadre ci-dessous contient-il de phrases vraies ?

Dans ce cadre, il y a exactement une phrase vraie.
Dans ce cadre, il y a exactement une phrase fausse.
Dans ce cadre, il, il y a exactement deux phrases vraies.
Dans ce cadre y a exactement deux phrases fausses.

Les cycles des suites qui se racontent

Pour trouver tous les cycles des suites qui se racontent, on peut utiliser un ordinateur, à condition de réduire d'abord le nombre de cas à essayer. Il est également possible de faire un raisonnement « classique ». J'ai raconté cette quête de la preuve dans deux articles, l'un en anglais[2], l'autre en français[3]. Des informations complémentaires peuvent être également trouvées sur Internet[4]. Aussi, n'est ici présentée que la liste des cycles. Pour en simplifier la lecture, < *n* > désigne le fait que *n* chiffres, choisis arbitrairement parmi les chiffres possibles, sont précédés d'un 1. Par exemple, dans le premier point fixe, < 8 >, désigne la suite 1013141516171819, et le premier point fixe est donc :
10 11 1 13 14 15 16 17 18 19.

POINTS FIXES

2 2 / 11 1/ <8> ce qui fait 1 point fixe,
2 3 / 3 2 / 7 1/ <7> ce qui fait 1 point fixe,
11 1/ <8> ce qui fait 9 points fixes
(9 façons de prendre 8 chiffres
parmi les 9 possibles en dehors de 1),
2 6 / 2 3 / 3 2 / 6 1/ <5> ce qui fait 6 points fixes,
2 5 / 2 3 / 3 2 / 5 1/ <4> ce qui fait 15 points fixes,
2 4 / 2 3 / 3 2 / 4 1/ <3> ce qui fait 20 points fixes,
3 3 / 2 2 / 3 1/ <2> ce qui fait 21 points fixes,
2 3 / 3 2 / 2 1/ <1> ce qui fait 7 points fixes,
3 3 / 3 1/ <2> ce qui fait 28 points fixes,
2 2 ce qui fait 1 point fixe,
d'où un total de 109 points fixes et autant de solutions au jeu de Robinson.

CYCLES DE PÉRIODE 2

2 8 / 1 7 / 1 4 / 4 2 / 7 1/ <5>
1 8 / 2 7 / 2 4 / 2 2 / 8 1 / <5>
ce qui fait 1 cycle,
2 7 / 1 6 / 1 4 / 4 2 / 6 1/ <4>
1 7 / 2 6 / 2 4 / 2 2 / 7 1 / <4>
ce qui fait 5 cycles,
2 6 / 1 5 / 1 4 / 4 2 / 5 1/ <3>
1 6 / 2 5 / 2 4 / 2 2 / 6 1 / <3>
ce qui fait 10 cycles,
2 4 / 1 3 / 4 2 / 3 1/ <2>
2 4 / 2 3 / 2 2 / 4 1 / <2>
ce qui fait 15 cycles,
d'où un total de 31 cycles de période 2.

CYCLES DE PÉRIODE 3

2 5 / 1 4 / 1 3 / 4 2 / 4 1/ <2>
1 5 / 3 4 / 1 3 / 2 2 / 5 1 / <2>
2 5 / 1 4 / 2 3 / 2 2 / 5 1/ <2>
ce qui fait 10 cycles de période 3.

C
Âge canonique

Chaque point du texte ci-dessous, qui a été écrit en 1999, représente un chiffre. Les phrases qui y sont inscrites sont exactes.
Reconstituez le texte.

Le capitaine est né en • • • •
Il aura donc • • ans, un âge canonique, en • • • •
Dans ce texte, il n'y a que • chiffres, chacun étant utilisé • fois.

Solutions des jeux pages 66-67

Les paradoxes de l'autoréférence

(pages 60 et 61)

Toutes les réponses peuvent se trouver avec la méthode des suites qui se racontent.

A Consonnes ?

Cette phrase contient **ONZE** consonnes de plus que de voyelles.

B Le vrai et le faux

DEUX phrases vraies.

C Âge canonique

Le capitaine est né en **1913**.
Il aura donc **93** ans, un âge avancé, en **2006**.
Dans ce texte, il n'y a que **6** chiffres utilisés, chacun l'étant **2** fois.