Bac to basics LES CONIQUES P. 99 | La parole aux lecteurs VOS QUESTIONS P. 103

« C'est tellement simple qu'un enfant de 5 ans le comprendrait. Qu'on aille me chercher un enfant de 5 ans ! »
Groucho Marx

Hyperbole, parabole, ellipse : bien que d'aspect très différent, ces trois courbes appartiennent à la même famille, celle des coniques. Leur variété de formes renvoie à la diversité de leurs caractéristiques.

Les coniques

Hervé Lehning
professeur de mathématiques spéciales au lycée Janson-de-Sailly.
herve.lehning@prepas.org

D'où vient le terme « conique » ?

De « section conique ». Apollonius de Perge, au III^e siècle av. J.-C. s'est intéressé à l'intersection d'un cône et d'un plan ne passant pas par son sommet. Le terme de « sections coniques » pour désigner ces courbes s'est depuis simplifié en « coniques ». Nous en observons tous les jours, sous la forme des taches de lumière que projette une lampe munie d'un abat-jour sur un mur ou sur le sol. Selon que le plan rencontre les deux nappes du cône ou une seule, on obtient une hyperbole ou une ellipse et, dans le cas intermédiaire, une parabole [fig. 1]. Les coniques se distinguent donc selon qu'elles sont bornées (ellipses), non bornées à une seule branche (paraboles) ou à deux branches (hyperboles). Ellipses et hyperboles ont un centre de symétrie. Pour cette raison, elles sont appelées « coniques à centre ». Elles ont également deux axes de symétrie orthogonaux entre eux, alors que la parabole n'en a qu'un. On retrouve les coniques comme sections planes d'autres surfaces, en particulier des hyperboloïdes de révolution — la forme des tours de refroidissement des centrales nucléaires par exemple.

Et ceux d'ellipse, de parabole et d'hyperbole ?

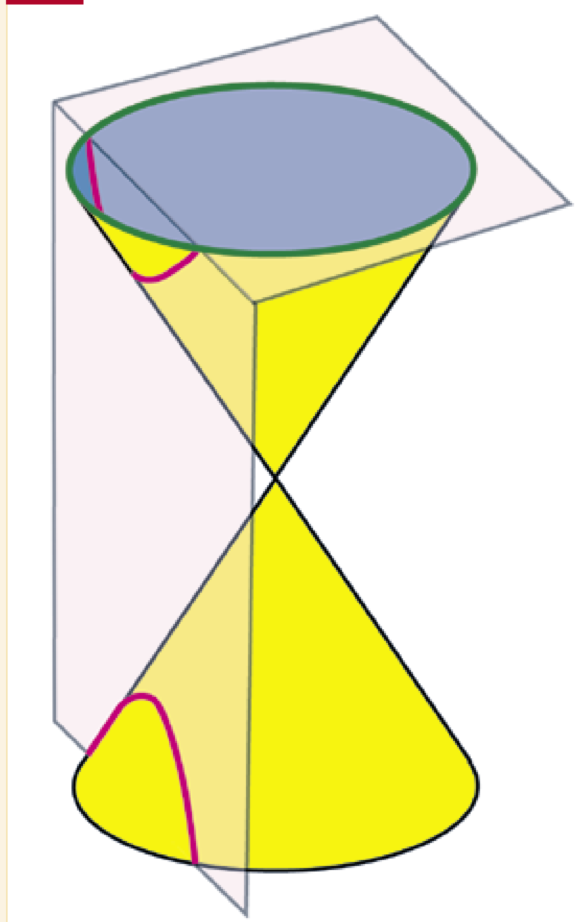
Toujours d'Apollonius de Perge, et donc du grec. Comme en linguistique, une ellipse désigne une omission, un manque. Ainsi, en géométrie, il s'agit d'un cercle raté. Parabole signifie « jeter à côté », d'où « comparer ». Parler en parabole était une figure de style courante dans l'Antiquité. Elle consiste à raconter une histoire de la vie quotidienne pour délivrer un message philosophique ou religieux. L'origine du terme mathématique est liée à la construction de la parabole comme lieu des points équidistants d'un point et d'une droite, autrement dit, on compare deux distances [fig. 2].

Hyperbole signifie « jeter au-delà ». Parler en hyperbole consiste à s'exprimer de façon exagérée. Apollonius liait l'utilisation de ce mot à l'existence des branches infinies, qui vont bien au-delà.

Qu'est-ce qui fait l'unité de ces courbes ?

Toutes sont des cercles vus en perspective. Pour le vérifier, rendez-vous près d'une balustrade, d'une arène ou de toute forme circulaire. Placez-vous à l'extérieur, en regardant horizontalement vers le centre. Vous voyez une ellipse. Dirigez-vous vers le centre. Quand vous arrivez au bord, l'ellipse devient une parabole. Une fois à l'intérieur, vous voyez une branche d'hyperbole. Cette propriété est simple à démontrer, mais difficile à admettre ! Pour la comprendre, il est nécessaire de modéliser notre vision comme une projection centrale, la transformation qui à un objet associe son image dans une prise de vue photographique. ⇨

Fig.1 Sections planes d'un cône



L'INTERSECTION du cône et d'un plan vertical est une hyperbole (en rose). Pour un plan horizontal, nous obtenons un cercle. L'effet de perspective le fait ressembler à une ellipse (en vert). Entre ces deux cas, quand le plan est parallèle à une génératrice, nous obtenons une parabole.

⇨ Si nous photographions un objet, l'image obtenue est la section par le plan de la pellicule (ou du capteur numérique) d'un cône dont le sommet est le diaphragme de l'appareil, et la base l'objet photographié. Si nous photographions un cercle, nous obtenons donc toujours une conique. De façon plus étonnante, elle peut prendre toutes les formes !

Comment définit-on les coniques en géométrie analytique ?

Ce sont les courbes ayant une équation du second degré dans un repère cartésien. Cette propriété ne dépend pas du repère choisi car les formules de changement de repère sont du premier degré. De façon paradoxale, pour le comprendre, mieux vaut envisager les calculs sans les effectuer. Au XVII^e siècle, René Descartes inventa la géométrie analytique dans cet esprit. En utilisant essentiellement le théorème de Pythagore, on montre que l'équation d'un cône C dans un repère cartésien adapté est : $x^2 + y^2 = k^2 z^2$, où k est une constante. Les formules de changement de repère étant du premier degré, aucun calcul n'est nécessaire pour en conclure que l'équation du cône est du second degré dans tout repère. Considérons maintenant une conique, il s'agit de la section du cône C par un plan P. On complète un repère Oxy de P par un axe Oz. L'équation de C dans ce repère Oxyz est du second degré, celle de sa section par P est obtenue en y annulant toutes les occurrences de z. L'équation de la conique est donc du second degré, et il en est de même de toute conique. Mis à part quelques cas dégénérés (comme $x^2 + y^2 = 0$ qui ne donne qu'un point), la réciproque est vraie. Par extension, en géométrie analytique, on définit les coniques comme les courbes ayant une équation du second degré. Pour les différencier des cas dégénérés, les « vraies » coniques (ellipse, parabole et hyperbole) sont dites « coniques propres ».

Cette façon de voir permit à Descartes de résoudre un problème proposé par Pappus d'Alexandrie au IV^e siècle apr. J.-C. : *« Étant donné quatre droites, trouver le lieu des points dont le produit des distances aux deux premières est égal au produit des distances aux deux dernières. »* Sans calcul, on peut affirmer que le lieu cherché est la réunion de deux coniques, éventuellement dégénérées. En effet, chaque distance est du premier degré en valeur absolue, ce qui donne deux équations du second degré. Ici encore, tout l'art est d'envisager les calculs sans les effectuer !

Comment retrouver les différentes formes à partir des équations ?

Par des changements de repères successifs (rotation et translation) que nous n'expliciterons pas ici car la question est technique. À la fin du processus, nous obtenons une équation simplifiée, que l'on dit canonique. Plus précisément, en modifiant éventuellement les unités sur les axes, on se ramène aux trois formes suivantes : $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 = y$. Ces trois courbes sont faciles à dessiner. La première est le cercle de centre O (l'origine du repère) et de rayon 1. L'ellipse est donc un cercle déformé par dilatation suivant l'un des axes [fig. 3]. Dans le repère formé par les bissectrices de l'ancien, la seconde courbe a pour équation : $y = 1/x$, très facile à dessiner. Les hyperboles se déduisent de celle-ci. La troisième courbe d'équation : $y = x^2$ s'étudie aussi facilement. Les paraboles s'en déduisent toutes.

Fig.2 La parabole

LES RAYONS issus du foyer d'une parabole s'y réfléchissent dans la direction de l'axe focal. La parabole est le lieu des points équidistants du foyer A et de la directrice D.

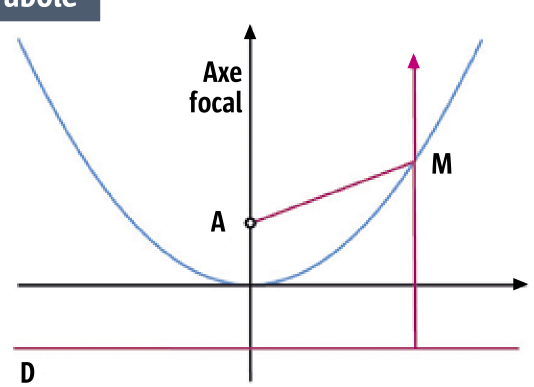
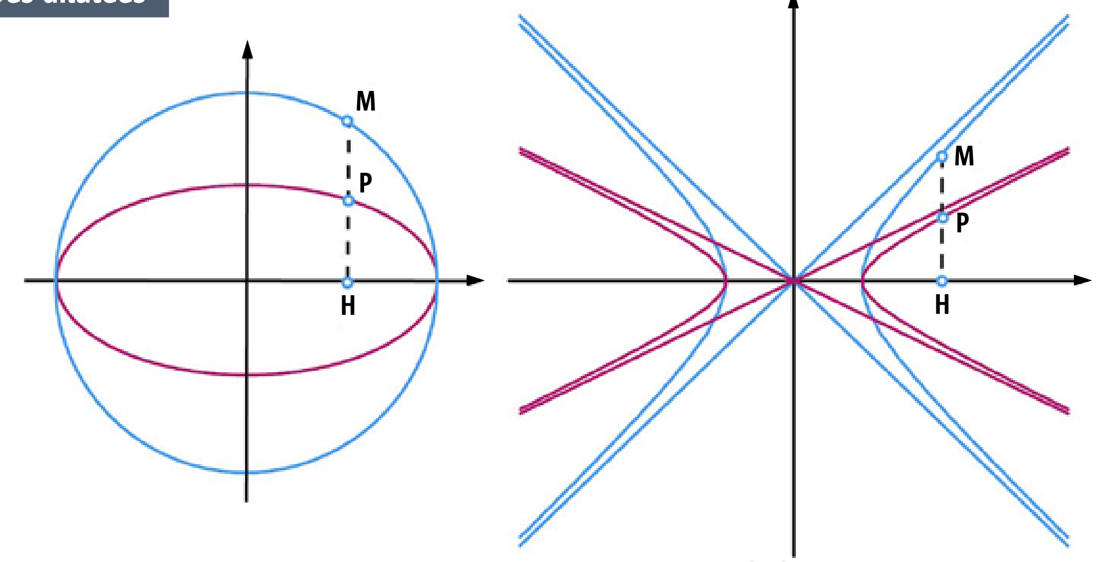


Fig.3 Des courbes dilatées

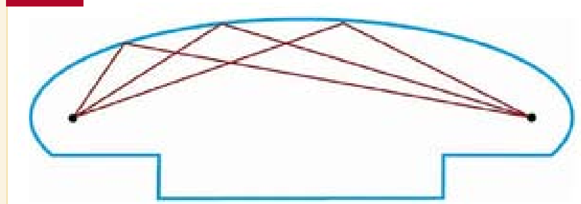
L'ELLIPSE se déduit du cercle par une affinité (dilatation de l'unité de l'un des axes). Plus précisément, sur la figure, le rapport HP / HM est constant. De même, une hyperbole quelconque se déduit de l'hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont perpendiculaires entre elles.



Qu'est-ce que le « foyer » d'une conique ?

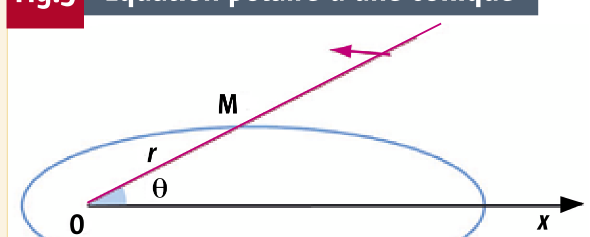
Le terme « foyer » vient de l'optique. Il s'agit d'un point vers lequel convergent des rayons lumineux déviés par un système optique. Cette déviation correspond ici à une réflexion sur la conique (comme si celle-ci était un miroir). On démontre qu'une ellipse possède deux foyers. Les rayons issus de l'un sont focalisés sur l'autre, et *vice versa*. Si le plafond d'une pièce est de forme elliptique, comme dans les stations traditionnelles du métro parisien, les sons émis de l'un des foyers se focalisent sur l'autre [fig. 4]. C'est ainsi que les poinçonneurs du siècle dernier se parlaient d'un quai à l'autre sans élever la voix. Au Moyen Âge, cette propriété fut utilisée pour la confession des malades sans risquer la contagion (à l'abbaye de la Chaise-Dieu, par exemple). En fixant l'un des foyers et en faisant tendre l'autre vers l'infini dans la direction de l'axe focal, on obtient une parabole. Les rayons issus du foyer sont réfléchis sur la parabole vers l'infini dans la direction de l'axe, et *vice versa*. Cette propriété est utilisée dans les phares de voiture ou du bord de mer comme, en sens inverse, dans les fours solaires ou les paraboles de télévision sur les toits. L'hyperbole admet également une propriété focale mais elle a moins d'intérêts pratiques : les rayons issus de l'un des foyers ne sont pas focalisés sur l'autre, mais le fuient !

Fig.4 Propriété focale de l'ellipse



SI UNE VOÛTE EST DE FORME ELLIPTIQUE, les sons émis de l'un de ses foyers sont focalisés sur l'autre. Dans une pièce voûtée, on peut ainsi se parler en chuchotant.

Fig.5 Équation polaire d'une conique



UN AXE OX ÉTANT DONNÉ, on appelle rayon et angle polaire d'un point M la longueur r = OM et l'angle Θ = (Ox, OM). Si M décrit une conique, ou une courbe de façon générale, r et Θ sont liés par une relation. Si O est le foyer, cette relation est : $p/r = 1 - e \cos \Theta$ où e et p sont l'excentricité et le paramètre.

Comment construire les coniques ?

Avec une corde de longueur fixe, les jardiniers construisent des parterres elliptiques parfaits. Pour cela, ils plantent deux pieux en deux points A et B, y accrochent la corde, la tendent au moyen d'un autre pieu (en M) qu'ils font tourner ainsi. Le point M décrit une ellipse de foyers A et B. Autrement dit, le lieu des points M tels que la somme des longueurs AM et BM soit constante, égale à K, est une ellipse de foyers A et B. De même, le lieu des points M tels que la différence des longueurs AM et BM soit constante, égale à K, est une branche d'hyperbole. L'autre branche correspond à la constante − K. Cette propriété ne permet pas une construction aussi simple que celle de l'ellipse.

Qu'est-ce que l'excentricité d'une conique ?

Une ellipse est un cercle excentré, c'est-à-dire un cercle dont on a déplacé le centre. Son excentricité mesure sa différence par rapport au cercle. Plus ⇨

Les coniques

⇨ précisément, l'excentricité e est le rapport entre la distance entre les deux foyers et son plus grand diamètre. Ainsi, un cercle est une ellipse d'excentricité nulle. Les ellipses sont toutes d'excentricité inférieure à 1. La parabole étant la position limite d'une ellipse quand on envoie l'un de ses foyers à l'infini, on peut admettre que son excentricité est égale à 1. Cette remarque aboutit à une généralisation de la notion d'excentricité : le lieu des points M tels que le rapport des distances de M à A et D soit égal à une constante positive donnée est une conique. Cette constante est appelée excentricité de la conique et notée e. Si e est inférieur ou égal à 1, on retrouve l'ellipse et la parabole. Si $e > 1$, on obtient l'hyperbole.

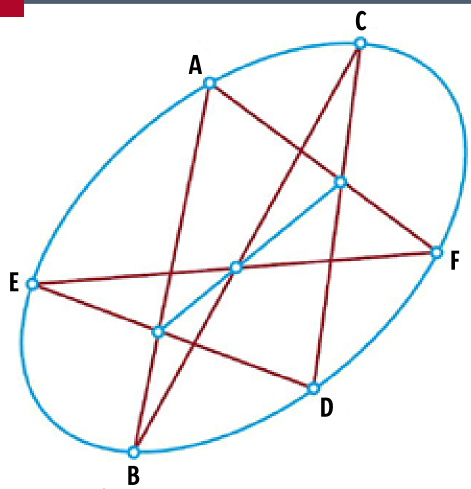
Pourquoi les coniques interviennent-elles en mécanique céleste ?

À cause des lois de Newton : deux masses s'attirent mutuellement en raison inverse du carré de leur distance. Autrement dit, si une masse est placée en un point O, tout point M de masse non nulle est soumis à une force dirigée vers O et proportionnelle à l'inverse du carré de la distance OM, à $1/r^2$ en coordonnées polaires. La loi fondamentale de la mécanique liant force et accélération permet de déterminer le mouvement de M en fonction des conditions initiales. L'équation s'intègre en $p/r = 1 - e \cos \Theta$, qui caractérise une conique de foyer O et d'excentricité e [fig. 5]. Ainsi, les planètes du système solaire ont des orbites elliptiques ayant le Soleil pour foyer. Un satellite artificiel abandonné à une certaine altitude suivra une trajectoire elliptique, parabolique ou hyperbolique selon sa vitesse initiale.

Quelles sont les propriétés des coniques les plus remarquables ?

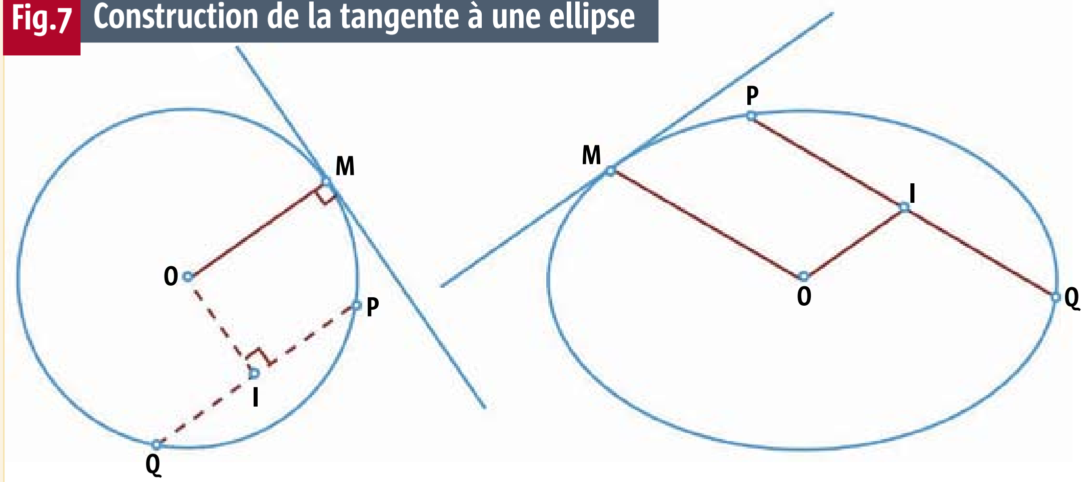
Au XVIIe siècle, Blaise Pascal démontra une propriété partagée par toutes les coniques de façon étonnante. En utilisant des propriétés spécifiques au cercle (la puissance d'un point), il démontra que, si un hexagone ABCDEF (un polygone à six côtés qui n'est pas nécessairement convexe) est inscrit dans un cercle, ses côtés AB et DE, BC et EF, CD et FA se coupent en trois points alignés [fig. 6]. Il remarqua ensuite que les propriétés d'alignement sont conservées par projection centrale. Pour l'observer, il suffit d'examiner une photographie : les droites y sont représentées par des droites. La seule différence avec la réalité est que les parallèles se rejoignent à l'infini, comme les rails d'une voie de chemin de fer. Toute propriété de ce type vraie pour un cercle l'est pour toute conique. De façon plus générale, toute propriété conservée par projection centrale (comme l'alignement, le parallélisme ou la concourance), valable pour le cercle l'est pour toutes les coniques. De même, toute ellipse est l'image d'un cercle par une affinité (dilatation selon l'un des axes). On en déduit que toutes les propriétés conservées par affinité (alignement, parallélisme, concourance, barycentre (milieu et centre de gravité) et rapport d'aires, valables pour le cercle le sont pour toute ellipse. Ainsi, si l'on considère le milieu I d'une parallèle PQ au rayon OM, la tangente en M au cercle est la parallèle à OI : cette propriété étant affine se transmet à toutes les ellipses [fig. 7] ! ▮▮

Fig.6 L'hexagramme mystique de Pascal



BLAISE PASCAL DÉMONTRA que, si un hexagone ABCDEF est inscrit dans un cercle, ses côtés AB et DE, BC et EF, CD et FA se coupent en trois points alignés. Comme toute conique se déduit d'un cercle par projection centrale et qu'une projection centrale conserve les alignements, il en déduit que la propriété est vraie pour toute conique. La beauté de la démonstration lui fit nommer cette propriété l'« hexagramme mystique ».

Fig.7 Construction de la tangente à une ellipse



LA CONSTRUCTION DE LA TANGENTE À UN CERCLE est *a priori* métrique, puisqu'elle nécessite l'intervention d'un angle droit. Il est possible cependant de la transformer en propriété affine, et donc de la transporter à toutes les ellipses : la tangente est parallèle à OI, où I est le milieu de PQ, corde parallèle à OM.

POUR EN SAVOIR PLUS

▮ Marcel Berger, *Géométrie*, t. 4, Cedic/Fernand Nathan, 1978.

▮ A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky, *Geometry of Conics*, *Mathematical World*, vol. 26, publication de l'AMS, 2008.