Ensemble limite d'une suite chaotique

par Hervé Lehning

Alors que l'étude des suites chaotiques est devenue un sujet à la mode, les ouvrages qui traitent ce sujet abordent rarement la question de leur ensemble limite, c'est-à-dire l'ensemble de leurs valeurs d'adhérence. Pourtant, il est facile de donner un certain nombre de résultats le concernant.

Partie I
Ensembles limites

Dans tout cet article, X est une partie compacte infinie d'un espace vectoriel réel normé de dimension finie (on note d la distance induite) et f une fonction continue de X dans X. On appelle ensemble limite de la suite $(f^n(x))_{n \geqslant 0}$ et on note $\omega(f,x)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Les ensembles limites vérifient la propriété suivante :

1. Propriétés des ensembles limites

Les ensembles limites de f sont des compacts non vides invariants par f et indécomposables, c'est-à-dire non réunion de deux compacts disjoints non vides invariants par f.

Soit t un point adhérent à $\omega(f,x)$, il existe donc une suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\omega(f,x)$ de limite t. $t \in \omega(f,x)$ donc on peut choisir $\varphi(1)$ tel que $\mathrm{d}[f^{\varphi(1)}(x), t_1] < 1$. Nous supposons $\varphi(1) < \varphi(2) < ... < \varphi(n)$ choisis tels que $\mathrm{d}[f^{\varphi(k)}(x), t_k] < \dfrac{1}{k}$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$. Comme $t_{n+1} \in \omega(f,x)$, on peut choisir $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $\mathrm{d}[f^{\varphi(n+1)}(x), t_{n+1}] < \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, par récurrence, on construit une suite extraite de $(f^n(x))_{n \geqslant 0}$ de limite t. Ceci prouve que $t \in \omega(f,x)$. Ceci étant vrai pour tout t, on en déduit que $\omega(f,x)$ est fermé donc compact.

Soit $t \in \omega(f,x)$, il existe donc une suite extraite $(f^{\varphi(n)}(x))_{n \geqslant 0}$ de limite t. Comme f est continue, la suite $(f^{\varphi(n)+1}(x))_{n \geqslant 0}$ converge vers $f(t)$, ce qui prouve que $f(t) \in \omega(f,x)$. Ceci étant vrai pour tout t, on en déduit que $f[\omega(f,x)] \subset \omega(f,x)$. D'autre part, la suite $(f^{\varphi(n)-1}(x))_{n \geqslant 0}$ est une suite d'éléments de X qui est compact, on peut donc en extraire une suite convergente $(f^{\varphi \circ \psi(n)-1}(x))_{n \geqslant 0}$. Soit u sa limite,

$u \in \omega(f,x)$ et la suite $(f^{\varphi\circ\psi(n)}(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers t et $f(u)$ qui se trouvent donc être égaux. Ainsi, pour tout $t \in \omega(f,x)$, il existe $u \in \omega(f,x)$ tel que $t = f(u)$ c'est-à-dire que $\omega(f,x) \subset f[\omega(f,x)]$.

En conclusion, $f[\omega(f,x)] = \omega(f,x)$, c'est-à-dire que $\omega(f,x)$ est invariant par f.

Supposons que $\omega(f,x) = R \cup S$ où R et S sont deux compacts non vides disjoints invariants par f.

Soit $\varepsilon > 0$, on note R_ε (et de même S_ε) l'ensemble des x tels que $\mathrm{d}(x,R) < \varepsilon$. Supposons que, pour tout ε, $R_\varepsilon \cap S_\varepsilon \neq \emptyset$. Alors on peut construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}[\mathrm{d}(x_n,R)] = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}[\mathrm{d}(x_n,S)] = 0$. Comme X est compact, cette suite admet au moins une valeur d'adhérence t. Elle vérifie donc $\mathrm{d}(t,R) = \mathrm{d}(t,S) = 0$. Comme R et S sont fermés, cela implique $t \in R \cap S$, ce qui est absurde. On en déduit que, pour ε assez petit, $R_\varepsilon \cap S_\varepsilon = \emptyset$.

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur X, donc il existe $0 < \delta < \varepsilon$ tel que $\mathrm{d}[f(u),f(v)] < \varepsilon$ dès que $\mathrm{d}[u,v] < \delta$. À partir d'un certain rang N, $f^n(x) \in R_\delta \cup S_\delta$. Soit donc n tel que $f^n(x) \in R_\delta$ et $f^{n+1}(x) \in S_\delta$. Il existe $a \in R$ et $b \in S$ tels que $\mathrm{d}[f^n(x),a] < \delta$ et $\mathrm{d}[f^{n+1}(x),b] < \delta$. Il s'ensuit que $\mathrm{d}[f^{n+1}(x),f(a)] < \varepsilon$ et $f(a) \in R$ donc $f^{n+1}(x) \in R_\varepsilon \cap S_\varepsilon$, ce qui est absurde.

Ceci étant vrai pour tout $\omega(f,x)$, on en déduit que les ensembles limites de f sont des compacts non vides invariants par f et indécomposables.

Il est facile de trouver des exemples de compacts vérifiant les propriétés précédentes et qui ne sont pas des ensembles limites (il suffit de considérer un segment X et une fonction f telle que, pour tout x, la suite $(f^n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers la même limite). Il ne s'agit donc pas d'une caractérisation mais d'une condition nécessaire. À l'inverse, la propriété suivante est une condition suffisante.

2. Transitivité topologique

Soit f une fonction continue de X dans X et T un compact invariant par f, on dit que f est topologiquement transitive sur T si pour tout couple (U,V) d'ouverts non vides de T, il existe un élément x de U et un entier n tels que $f^n(x) \in V$.

> *Si T est un compact non vide stable par f sur lequel f est topologiquement transitive, alors T est un ensemble limite.*

Soit T un compact non vide stable par f (c'est-à-dire que $f(T) \subset T$) tel que f soit topologiquement transitive sur T. Si $x \in T$, comme T est stable par f, alors la suite $(f^n(x))_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans T. Comme T est compact, on en déduit que $\omega(f,x) \subset T$.

Soit B une base dénombrable d'ouverts de T. Si $U \in B$, on note E_U l'ensemble des $x \in T$ tels qu'il existe un entier n tel que $f^n(x) \in U$.

Soit $x \in E_U$; il existe un entier n tel que $f^n(x) \in U$. Comme f^n est continue, il existe V ouvert contenant x tel que $f^n(V) \subset U$. Il s'ensuit que $V \subset E_U$ et donc que E_U est un voisinage de x. Ceci étant vrai pour tout x, on en déduit que E_U est un ouvert de T.

Soit $x \in T$ et V un ouvert contenant x. Il existe $t \in V$ et un entier n tels que $f^n(t) \in U$. Ainsi, $t \in E_U$. On en déduit que tout voisinage de x contient un élément de E_U, c'est-à-dire que x adhère à E_U. Ceci étant vrai pour tout x, il s'ensuit que E_U est dense dans T.

T étant une partie compacte d'un espace vectoriel réel normé de dimension finie est un espace complet. Le théorème de Baire y est donc applicable, ainsi l'ensemble $E = \bigcap\limits_{U\in B} E_U$ est non vide.

Soit donc $x \in E$ et V un ouvert non vide de T. Il existe $U \in B$ inclus dans V. Comme $x \in E_U$, il existe un entier n tel que $f^n(x) \in U$ et donc $f^n(x) \in V$. Ceci étant vrai pour tout V, on en déduit que $\omega(f,x) \supset T$. Il s'ensuit que $\omega(f,x) = T$.

Partie II
Dynamique chaotique

1. Définition

> *Selon Robert Devaney, la dynamique de f est dite chaotique (voir [1], p.87) si :*
>
> (1) *f est topologiquement transitive sur X,*
>
> (2) *l'ensemble des cycles de f est dense dans X.*

La propriété (1) se caractérise par :

> *f est topologiquement transitive sur X si et seulement si il existe un élément x de X tel que $\omega(f,x) = X$.*

La partie directe de cette propriété a déjà été vue en **I.2**. On suppose donc qu'il existe un élément x de X tel que $\omega(f,x) = X$. Soit (U,V) un couple d'ouverts non vides de X. Puisque $\omega(f,x) = X$, il existe un entier p tel que $f^p(x) \in U$. De même, il existe un entier $n > p$ tel que $f^n(x) \in V$. Il existe donc un élément $t \in U$

$(t = f^p(x))$ et un entier m $(m = n - p)$ tels que $f^m(t) \in V$. Ceci étant vrai pour tout couple d'ouverts rencontrant (U, V), on en déduit que f est topologiquement transitive.

2. Conditions suffisantes

Une condition réalisée pour une classe importante de fonctions et qui entraîne la transitivité est la suivante :

(3) *L'ensemble des antécédents de tout élément x de X est dense dans X.*

En effet, soit (U, V) un couple d'ouverts non vides de X et $t \in V$. L'ensemble des antécédents de t est dense dans X donc il en existe un dans U, c'est-à-dire qu'il existe $x \in U$ et un entier n tels que $t = f^n(x)$ donc $f^n(x) \in V$. f est donc topologiquement transitive.

Cette dernière propriété (3) est entraînée elle-même par la condition suivante :

(4) *Pour tout ouvert non vide U de X, il existe un entier n tel que $f^n(U) = X$.*

En effet, soit $x \in X$ et U un ouvert non vide. D'après (4), il existe un entier n tel que $f^n(U) = X$ donc il existe $t \in U$ tel que $x = f^n(t)$. f vérifie donc (3).

De plus, si X est un segment $[a, b]$ alors cette propriété permet d'affirmer également que l'ensemble des cycles de f est dense dans X et donc que la dynamique de f est chaotique.

En effet, soit U un intervalle ouvert non vide de $[a, b]$. Il existe un entier n tel que $f^n(U) = X$. Soit donc $\alpha \in U$ tel que $f^n(\alpha) = a$ et $\beta \in U$ tel que $f^n(\beta) = b$. La fonction continue $x \longrightarrow f^n(x) - x$ a des signes opposés en α et β donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur U. Ainsi U contient un élément d'un cycle de f. Ceci étant vrai pour tout intervalle ouvert non vide, cela signifie que l'ensemble des cycles de f est dense dans X.

Partie III
Exemples

À partir de ces condition, il est possible de bâtir des exemples :

1. Fonction affine par morceaux sur un segment

Soit f la fonction définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x \text{ si } x \in [0, 1/2] \\ f(x) = 2 - 2x \text{ si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Cette fonction est appelée « fonction tente » par Richard Holmgren (voir [1], p.102). Peut-être cela permet-il de donner l'âge de l'auteur car de nos jours les tentes ont rarement cette allure (voir figure 1) :

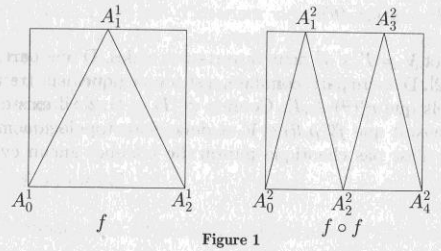

Figure 1

Le graphe de la fonction f^n est la ligne brisée $A_0^n A_1^n \ldots A_{2^n}^n$, où A_p^n est le point d'abscisse $\dfrac{p}{2^n}$ et d'ordonnée 0 si p est pair, 1 sinon. L'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{p}{2^n}$ $(0 \leqslant p \leqslant 2^n)$ est dense dans $[0, 1]$ donc si U est un ouvert non vide alors il existe n et p tels que $\left[\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}\right] \subset U$, ce qui implique que $f^n(U) = [0, 1]$.

2. Sur un cercle

Si on repère chaque point du cercle unité C par son angle polaire θ, soit f la fonction définie sur C par $f(\theta) = 2\theta$. Cette fonction vérifie également la propriété (4). On peut soit le démontrer de la même manière en considérant le graphe de f sur le tore, soit remarquer que f double la longueur des intervalles.

Si r_α est la rotation d'angle $2\pi\alpha$, selon que α est rationnel ou non, pour tout θ, l'ensemble limite $\omega(r_\alpha, \theta)$ est fini ou égal à C. Dans le cas où α est irrationnel, r_α est donc topologiquement transitive sans être chaotique puisque r_α n'a aucun cycle.

3. Fraction rationnelle sur le compactifié de $\mathbb{R}$

Sur le compactifié de $\mathbb{R}$, toute fraction rationnelle dont l'ensemble de Julia le contient vérifie la propriété (4). On peut dans chaque cas montrer directement (3) ou (4) (voir [2] pour $f(x) = x - \frac{1}{x}$). Notez que le premier exemple de **III.2** ressort du même type de cas mais sur le corps des complexes.

4. Sur une couronne

On considère la fonction φ définie comme en **III.1** mais sur le segment $[1,2]$, r_α la rotation d'angle $2\pi\alpha$ avec α irrationnel et $X = [1,2] \times C$. Soit f la fonction définie sur X par $f(\rho,\theta) = \varphi(\rho) r_\alpha(\theta)$.

Soit $U = I \times J$ et $V = I' \times J'$ deux ouverts non vides. D'une part, il existe n tel que $\varphi^n(I) = [1,2]$. D'autre part, comme r_α est topologiquement transitive, il existe $\theta \in$ et $p > n$ tels que $r_\alpha^p(\theta) \in J'$. Comme $\varphi^p(I) = [1,2]$, il existe $\rho \in I$ tel que $\varphi^p(\rho) \in I'$. Il s'ensuit que $f^p(\rho,\theta) \in V$ et donc f est topologiquement transitive. Cependant, elle n'est pas chaotique puisqu'elle n'admet aucun cycle puisque r_α n'en admet pas.

Partie IV
Ensemble limite

1. Limite dans le cas typique

Le sens du mot typique est étudié en [3], nous rappelons ici sa définition :

Définition.

On appelle résiduelle toute partie de X contenant l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses. On dit qu'une propriété est typique si l'ensemble des points pour lesquels elle est vraie est résiduel.

En reprenant la démonstration de **I.2** en remplaçant T par X, on remarque que l'ensemble $E = \bigcap_{U \in B} E_U$ est non seulement non vide mais également résiduel. On en déduit le résultat :

Si f est topologiquement transitive sur X alors pour x typique dans X, $\omega(f,x) = X$.

2. Limite dans les cas rares

Nous nous proposons donc maintenant d'étudier les cas rares (c'est-à-dire faux sur un ensemble résiduel) pour lesquels $\omega(f,x) \neq X$.

a. Intérieur de $\omega(f,x)$

Si f est topologiquement transitive sur X et si $\omega(f,x) \neq X$ alors $\omega(f,x)$ est d'intérieur vide.

Soit donc x tel que $\omega(f,x)$ soit d'intérieur vide. Il existe donc un ouvert U non vide inclus dans $\omega(f,x)$. Soit V un ouvert non vide. La transitivité implique qu'il existe $t \in U$ et un entier n tel que $f^n(t) \in V$. La fonction f^n est continue donc il existe un ouvert W contenant t tel que $f^n(W) \subset V$. Comme $t \in \omega(f,x)$, il existe un entier p tel que $f^p(x) \in W$ et donc $f^{n+p}(x) \in V$. Ceci étant vrai pour tout ouvert V, on en déduit que $\omega(f,x) = X$.

b. Cas où $\omega(f,x)$ est fini

Si f est continue sur X et si $\omega(f,x)$ est fini alors $\omega(f,x)$ est un cycle de f.

Si $\omega(f,x)$ est fini alors la restriction $\tilde{f}$ de f à $\omega(f,x)$ est bijective puisque surjective d'après **I.1**. Il s'agit donc d'une permitation de $\omega(f,x)$ qui se décompose en cycles disjoints. Or $\omega(f,x)$ est indécomposable (voir **I.1**) donc $\omega(f,x)$ est un cycle.

c. Effectivité de ces cas

Si f est seulement supposé topologiquement transitive, il est possible que pour tout condition initiale l'ensemble limite soit égal à X (deuxième exemple de **III.3**). Bien entendu, ce n'est jamais le cas si X est un segment car f a alors au moins un point fixe. On retrouve ce cas si X est un disque et de façon générale dans tout espace où un théorème du point fixe est applicable.

Si f est chaotique, le cas $\omega(f,x)$ fini se produit par hypothèse. Il est également possible que $\omega(f,x)$ soit infini d'intérieur vide. Il est facile de le démontrer dans l'exemple de **III.1** et le premier exemple de **III.2** en utilisant l'écriture binaire des nombres. Dans le premier cas, il suffit de partir de la condition initiale $x = 0{,}01100011110000011111110\ldots$ (après la virgule, on écrit 1 «0», 2 «1», 3 «0», 4 «1», 5 «0» et ainsi de suite). On montre assez facilement que la suite n'est pas périodique et qu'aucun de ses termes ne se trouve entre 0,1 et 0,11. Le résultat suit.

L'exemple **III.4** est non chaotique selon la définition de Robert Devaney.

Cependant, si la condition initiale est (ρ, θ) où ρ appartient à un cycle de φ et θ quelconque alors l'ensemble limite est composé d'un nombre fini de cercles. Il s'agit donc d'un compact infini d'intérieur vide. Puisque φ est chaotique, cet ensemble de conditions initiales est dense.

Autant, il semble légitime de considérer le cas où l'ensemble limite est toujours l'espace entier comme non chaotique puisque le changement de condition initiale ne change pas le comportement de la suite, autant il nous semble étrange que ce dernier cas ne soit pas considéré comme chaotique.

Partie V

Étude de la fonction $\omega_f : x \longrightarrow \omega(f, x)$

Dans le but d'élargir la notion de chaos aux cas tels que **III.4**, nous nous proposons d'étudier la fonction $\omega_f : x \longrightarrow \omega(f, x)$. En effet, en dernière analyse, c'est cette fonction qui permet de mesurer la sensibilité de la dynamique de f à la condition initiale x. Cette fonction est à valeurs dans l'ensemble des compacts de X, pour étudier sa continuité, nous munissons donc cet ensemble de la distance de Hausdorff (voir [3]). Nous avons le résultat suivant :

Si f est chaotique alors l'ensemble des points de discontinuité de ω_f est dense dans X.

En effet, la fonction ω_f est discontinue en tout point x_0 d'un cycle. En effet, dans ce cas $\omega_f(x_0)$ est un ensemble fini et, comme l'ensemble des x tels que $\omega(f, x) = X$ est dense dans X, il existe une suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$ de limite x_0 telle que $\omega_f(t_n) = X$ pour tout n. À la limite, on obtient une contradiction puisque X est supposé infini.

Cette propriété reste vraie dans des cas tels que celui de l'exemple **III.4**. Cette constatation nous amène à proposer la définition suivante.

Partie VI

Proposition de définition

1. Définition

Nous dirons que la dynamique de f est L-chaotique si :

(1) *pour x typique dans X, $\omega(f, x) = X$,*

(2) *l'ensemble des points de discontinuité de la fonction ω_f est dense dans X.*

Ainsi, si la dynamique de f est chaotique, elle est également L-chaotique. Bien entendu, nous pouvons donner une caractérisation de la dynamique L-chaotique dans le style — plus manipulable — de la définition de Robert Devaney.

2. Caractérisation

La dynamique de f est L-chaotique si :

(1) *f est topologiquement transitive sur X,*

(2) *la réunion des compacts d'intérieurs vides stables par f est dense dans X.*

Nous avons déjà vu que les deux propriétés (1) sont équivalentes (voir **II.1**). Supposons donc que f vérifie la propriété (2) ci-dessus et que l'ensemble des points de discontinuité de ω_f ne soit pas dense dans X et soit donc U un ouvert sur lequel ω_f soit continue. Soit x_0 un point de U. Comme l'ensemble des x tels que $\omega(f, x) = X$ est dense dans X, il existe une suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$ de limite x_0 telle que $\omega_f(t_n) = X$ pour tout n. À la limite, on obtient que $\omega(f, x_0) = X$. Ainsi, pour tout $x \in U$, $\omega(f, x) = X$. D'après la propriété (2), il existe un compact T non vide d'intérieur vide stable par f tel que $T \cap U \neq \emptyset$. Soit donc $x \in T \cap U$, comme T est un compact stable par f, $\omega(f, x) \subset T$ et $T \neq U$ puisque T est d'intérieur vide, ce qui est contradictoire. Il s'ensuit que l'ensemble des points de discontinuité de ω_f est dense dans X.

Réciproquement, soit U un ouvert non vide de X. D'après la définition, il existe $x \in U$ tel que $\omega(f, x)$ soit d'intérieur vide. Soit A l'ensemble des valeurs de la suite $(f^n(x))_{n \geqslant 0}$ et T son adhérence. On montre facilement que $T = A \cup \omega(f, x)$ et donc que T est un compact d'intérieur vide stable par f. $T \cap U \neq \emptyset$ donc U rencontre la réunion des compacts d'intérieurs vides stables par f. Ceci étant vrai pour tout U, on en déduit que cette réunion est dense dans X.

Bibliographie

[1] Richard Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1994.

[2] Hervé Lehning, *Étude de la suite* $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n - 1/u_n \end{cases}$ *dans le cas typique*, RMS, 1997 ; à paraître.

[3] Hervé Lehning, *Étude de la suite récurrente typique*, RMS, décembre 1996.