RMS 1982, page 405

Étrange Newton

par Hervé LEHNING.

Un jour, j'eus à résoudre l'équation

$$4x^3 - 7x^2 - x + 1 = 0$$

lors d'un problème de mathématiques appliquées. Je m'attendais — à cause de l'origine du problème — à trouver trois racines de l'ordre de l'unité, j'utilisais donc la méthode de Newton [1] sans perdre mon temps dans une étude qualitative de l'équation.

C'est-à-dire que, a réel étant choisi, je calcule successivement les termes de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{et} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \text{ pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$$

où φ est la fonction définie par

$$\varphi(x) = \frac{8x^3 - 7x^2 - 1}{12x^2 - 14x - 1}$$

(*fig.* 1) et j'attends une « stabilisation » des chiffres de u_n . . . .

Ceci est vite rectifié en changeant la valeur de a et j'obtiens bien trois racines α, β et γ :

$$\alpha = -0{,}404, \quad \beta = 0{,}342,$$
$$\gamma = 1{,}812, \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près.}$$

L'affaire aurait pu en rester là si elle n'avait éveillé ma curiosité sur l'étude de la convergence de la suite (u_n) en fonction de la « condition initiale » a. Type d'étude au demeurant assez classique, j'étudie donc φ de la façon habituelle :

φ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0, x'_0\}$ où

$$x_0 = \frac{7 - \sqrt{61}}{12} = -0{,}068 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

$$x'_0 = \frac{7 + \sqrt{61}}{12} = 1{,}234 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

φ est dérivable sur ce domaine et

$$\varphi'(x) = \frac{2(12x-7)}{(12x^2-14x-1)^2}(4x^3-7x^2-x+1),$$

d'où les variations de φ :

x	$-\infty$		α		x_0		β		$\frac{7}{12}$		x'_0		γ		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
φ	$-\infty$	↗	α	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	β	↗	$\frac{775}{2\,196}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	γ	↗	$+\infty$

Or, loin d'obtenir ce résultat, j'obtiens successivement 0 et 1 (j'avais choisi $a = 1$).

et le graphe de la figure 1.

D'autre part

$$\varphi(x) - x = -\frac{4x^3 - 7x^2 - x + 1}{12x^2 - 14x - 1}$$

d'où le signe de $\varphi(x) - x$:

[1] Pour en savoir plus sur l'aspect pratique de cette méthode et sur la précision des résultats, vous pouvez consulter l'ouvrage : *Mathématiques par l'informatique individuelle*, H. LEHNING et D. JAKUBOWICZ, Masson.

x	$-\infty$		α		x_0		β		x'_0		γ		$+\infty$
$\varphi(x)-x$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Enfin, je passe en revue les cas simples :

• $]-\infty, \alpha]$ est invariant par φ donc si $a \in]-\infty, \alpha]$ alors la suite (u_n) est définie. D'autre part si $x \in]-\infty, \alpha]$ alors $\varphi(x) \geqslant x$ donc

$$u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{pour tout } n;$$

la suite (u_n) est croissante et majorée par α donc elle converge vers un nombre $l \leqslant \alpha$ et, par continuité de φ,

$$\varphi(l) = l.$$

Or α est la seule solution de l'équation $\varphi(x) = x$ sur $]-\infty, \alpha]$ donc

$$l = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

D'autre part, si $a \in]\alpha, x_0[$ alors $\varphi(a) \in]-\infty, \alpha[$ donc ce qui précède est applicable et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

Finalement, si $a \in]-\infty, x_0[$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

D'autre part, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ alors il existe n tel que $u_n \in]-\infty, x_0[$. Soit donc A_n l'ensemble des points a tels que

$$u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} \notin]-\infty, x_0[\quad \text{et} \quad u_n \in]-\infty, x_0[$$

et

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n :$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ si, et seulement si, $a \in A$.

• Le même raisonnement est applicable pour γ et on obtient un ensemble C.

• $]0,1[$ est invariant par φ donc si $a \in]0, 1[$ alors la suite (u_n) est définie et de la même façon que précédemment, on démontre que si

$$a \in \left[\varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right), \frac{7}{12}\right] \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \beta,$$

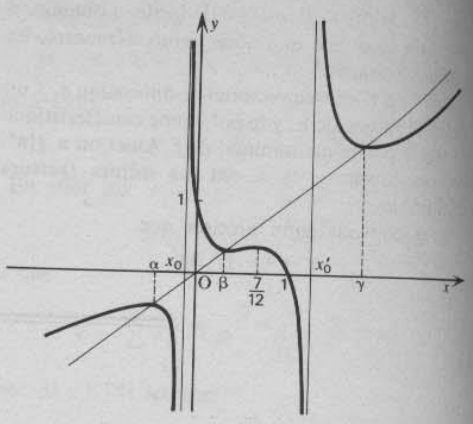


FIG. 1. — *Graphe de* φ.

où φ_1 est la fonction réciproque de la fonction φ restreinte à $]x_0, \beta[$ et $]\beta, +\infty[$, de même je noterai φ_2 celle de φ restreinte à

$$\left]\frac{7}{12}, x'_0\right[\quad \text{et} \quad \left]-\infty, \frac{775}{2\,196}\right[.$$

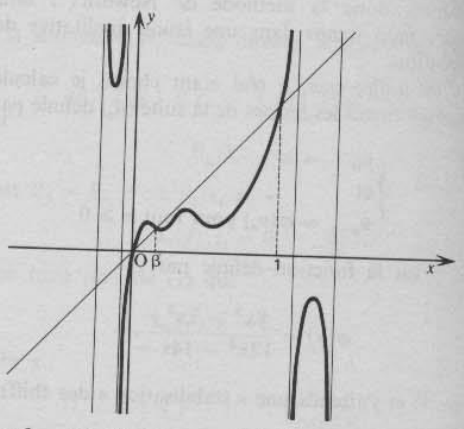


FIG. 2. — *Graphe de* $\varphi \circ \varphi$. *L'échelle n'a pas été respectée par souci de lisibilité.*

Pour étudier la suite (u_n) dans les autres cas, il est commode d'étudier les variations de la fonction $\varphi \circ \varphi$ sur $]x_0, x'_0[$; celles-ci se déduisant directement des variations de φ. J'en déduis le graphe de la figure 2.

x	x_0		$\varphi_1(\gamma)$		$\varphi_1(x'_0)$		$\varphi_1\left(\frac{7}{12}\right)$		β		$\frac{7}{12}$		$\varphi_2(\beta)$		1		$\varphi_2(x_0)$		$\varphi_2(\alpha)$		x'_0
$\varphi \circ \varphi$	$+\infty$	$\searrow$	γ	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{775}{2\,196}$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$\varphi\left(\frac{775}{2\,196}\right)$	$\searrow$	β	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	$-\infty$

D'autre part :

$$\varphi \circ \varphi(x) - x = \frac{-5\,120x^9 + 26\,880x^8 - 50\,032x^7 + 34\,684x^6 + 870x^5 - 7\,705x^4 + 154x^3 + 132x^2 + 137x}{(12x^2 - 14x - 1)^3[12\varphi(x)^2 - 14\varphi(x) - 1]}.$$

Le numérateur est divisible par

$$x(x-1)(4x^3 - 7x^2 - x + 1),$$

d'où

$$\varphi \circ \varphi(x) - x = \frac{x(x-1)(4x^3 - 7x^2 - x + 1)(-1\,280x^4 + 3\,200x^3 - 1\,788x^2 - 406x - 137)}{(12x^2 - 14x - 1)^3[12\varphi(x)^2 - 14\varphi(x) - 1]}.$$

Je note $f(x)$ ce dernier polynôme

$$f'(x) = -5\,120x^3 + 9\,600x^2 - 3\,576x - 406;$$

f' a trois zéros réels (²), u, v, w égaux à

$$u = -0{,}090, \quad v = 0{,}684,$$
$$w = 1{,}282, \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près};$$

d'où les variations de f :

x	$-\infty$		u		v		w		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$f(u)$	↘	$f(v)$	↗	$f(w)$	↘	$-\infty$

$f(u) = -117$ et $f(w) = -311$ à 10° près.
Donc $f(x) < 0$ pour tout x, j'en déduis le signe de $\varphi \circ \varphi(x) - x$:

x	x_0		$\varphi_1(x'_0)$		0		β		1		$\varphi_2(x_0)$		x'_0
$\varphi \circ \varphi(x) - x$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Maintenant, je suis en mesure d'étudier les cas

$$a \in \left]0, \varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right)\right[\quad \text{et} \quad a \in \left]\frac{7}{12}, 1\right[,$$

— Si $a \in \left]0, \varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right)\right[$, je vais démontrer par l'absurde qu'il existe n_0 tel que

$$u_{2n_0} \in \left[\varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right), \frac{7}{12}\right]$$

ce qui suffit pour assurer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \beta$.

Je suppose donc que, pour tout n,

$$u_{2n} \in \left]0, \varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right)\right[$$

alors (u_{2n}) est croissante (puisque $\varphi \circ \varphi(x) > x$ pour tout $x \in]0, \beta[$) et majorée donc converge vers une limite $l \in \left]0, \varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right)\right]$. Par continuité de $\varphi \circ \varphi$ sur cet intervalle, $\varphi \circ \varphi(l) = l$; or l'équation $\varphi \circ \varphi(x) = x$ n'a pas de solution sur $]0, \beta[$ donc il existe n_0 tel que

$$u_{2n_0-2} < \varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right) \quad \text{et} \quad u_{2n_0} \geqslant \varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right)$$

et, d'après les variations de $\varphi \circ \varphi$, $u_{2n_0} \leqslant \frac{775}{2\,196}$, d'où

$$u_{2n_0} \in \left[\varphi_1\left(\frac{775}{2\,196}\right), \frac{7}{12}\right]$$

ce que je voulais démontrer, donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta.$$

— Si $a \in \left]\frac{7}{12}, 1\right[$, il suffit de procéder de la même manière, donc si $a \in]0, 1[$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta.$$

De plus $\varphi^{-1}(]0, 1[) =]0, 1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \beta$ si, et seulement si, $a \in B =]0, 1[$.

Maintenant que j'ai passé en revue les cas simples, il me reste à étudier la définition de la suite (u_n), les cas où 0 et 1 sont valeurs d'adhérence et déterminer si il existe d'autres cas.

- Soit D_n l'ensemble des points a tels que

$$u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} \notin \{x_0, x'_0\}$$

et

$$u_n \in \{x_0, x'_0\}$$

et

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Alors la suite (u_n) est définie si, et seulement si, $a \notin D$.

$D_0 = \{x_0, x'_0\}$ et, d'après les variations de φ,

$$D_1 = \varphi^{-1}(D_0) = \{x_1, x'_1\}$$

où $x_1 = \varphi_3(x_0)$ et $x'_1 = \varphi_3(x'_0)$; où φ_3 est la

(²) Une méthode numérique — sans étude qualitative — suffit pour l'affirmer; bien entendu cela nécessite un calcul soigneux de l'incertitude.

fonction réciproque de φ restreinte à

$$]x_0, 0[\cup]1, x'_0[\quad \text{et} \quad]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$$

Par récurrence, je démontre alors que $D_n = \{x_n, x'_n\}$ où

$$x_n = \varphi_3(x_{n-1}) \quad \text{et} \quad x'_n = \varphi_3(x'_{n-1}).$$

Les deux suites ainsi définies sont bornées; (x_{2n}) est croissante (puisque $\varphi \circ \varphi(x) < x$ pour tout $x \in]x'_1, 0[$) et majorée par 0 donc converge vers une limite $l \in]x'_1, 0]$ vérifiant

$$\varphi_3 \circ \varphi_3(l) = l$$

car φ_3 est continue donc

$$\varphi \circ \varphi(l) = l$$

ce qui implique $l = 0$ d'où

$$\lim_{n \to +\infty} x_{2n} = 0.$$

De même $\lim_{n \to +\infty} x_{2n+1} = 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} x'_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} x'_{2n+1} = 0.$$

A l'aide de ces résultats, je peux expliciter les ensembles A et C : en effet

$$A_0 =]-\infty, x_0[$$

et, d'après les variations de φ,

$$A_1 =]x_1, x'_0[$$

et ainsi de suite

$$A_n =]x_n, x'_{n-1}[;$$

de même

$$C_0 =]x'_0, +\infty[\quad \text{et} \quad C_n =]x'_n, x_{n-1}[$$

ce qui montre que

$$A \cup C \cup D =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$$

Donc 0 et 1 sont valeurs d'adhérence de la suite (u_n) si, et seulement si, $a \in E = \{0, 1\}$ et il n'existe pas d'autres cas que les cinq énumérés.

Pour conclure, la figure 3 rassemble tous ces résultats.

Vous remarquerez que les ensembles A, C et D ont la même frontière : $\bar{D} = D \cup E$ et que les ensembles A, B et C sont des ouverts ce qui est naturel. La remarque la plus intéressante étant l'extrême sensibilité du comportement de la suite (u_n) vis à vis de la condition initiale a au niveau des points 0 et 1 : ce phénomène est assez étudié de nos jours sous le nom « étrange » d'attracteur étrange.

Pour revenir au problème de la méthode de Newton appliquée à une équation du troisième

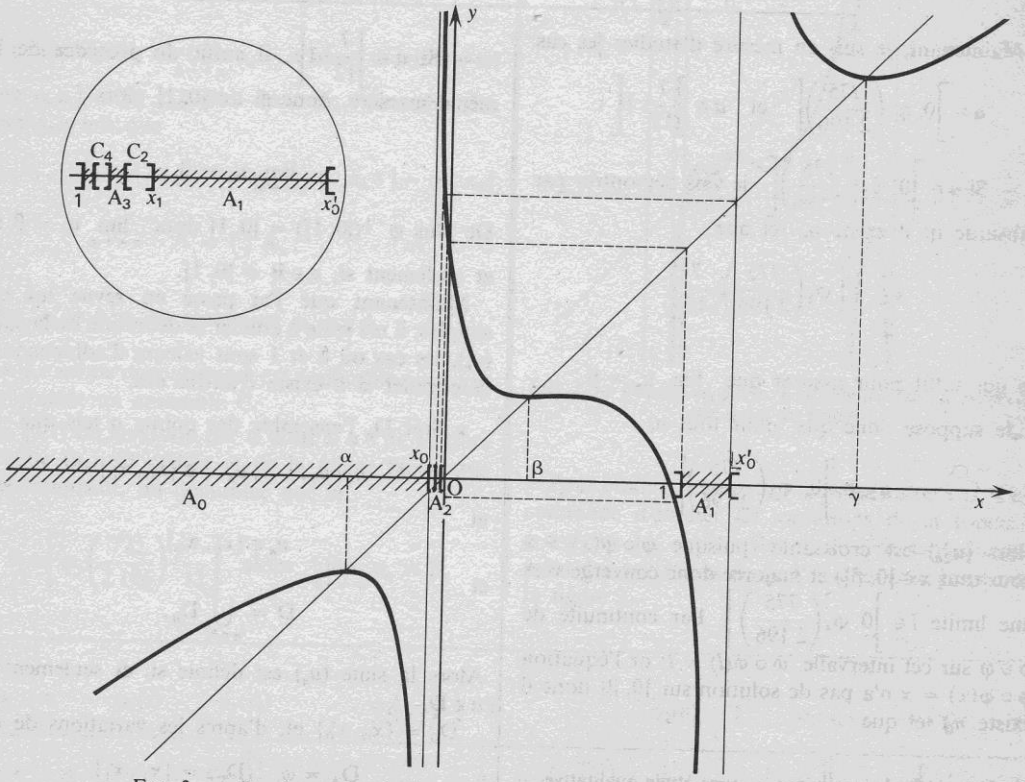
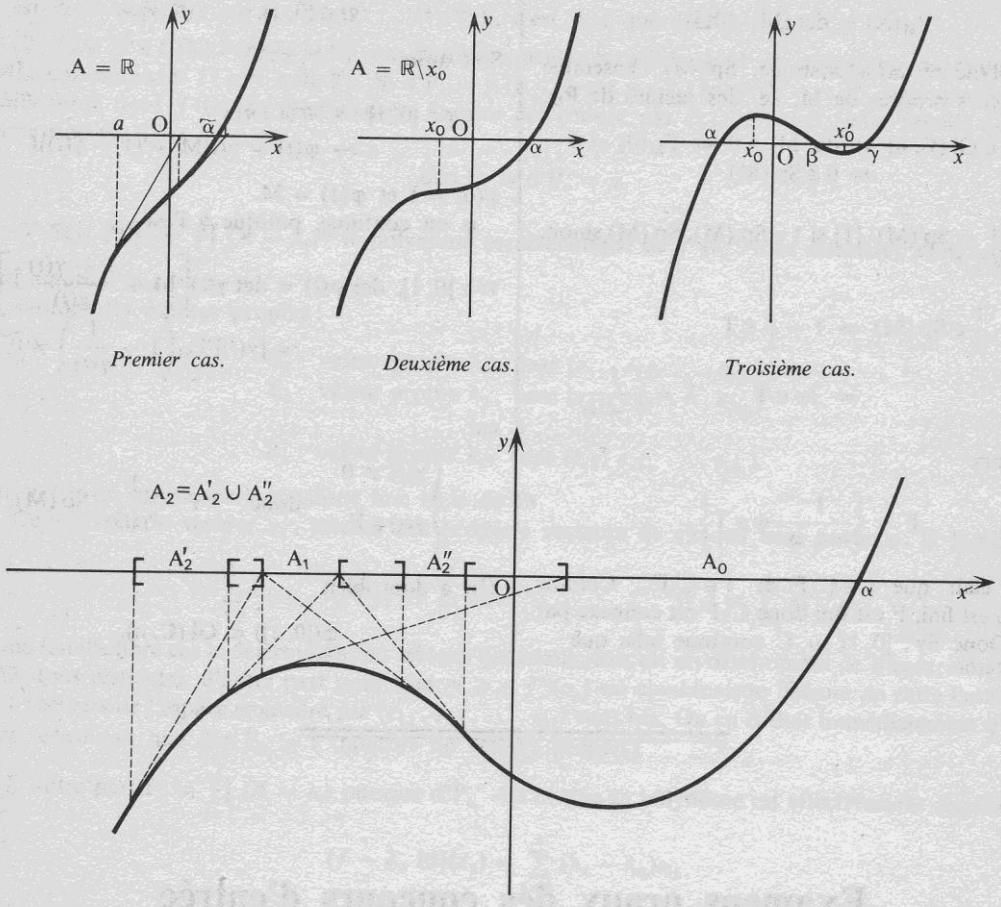


FIG. 3. — *Représentation de l'ensemble* A *des points u tels que :* $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.
L'agrandissement de l'intervalle $]1, x'_0[$ *montre l'enchevêtrement des ensembles* A *et* C.

degré, quatre cas principaux sont à envisager (*fig.* 4). Les deux premiers sont très simples et le troisième identique à celui étudié ([3]), le quatrième est le cas vraiment intéressant : je le laisse pour une autre note.

([3]) Cela constitue un bon exercice que de le démontrer.



Premier cas. *Deuxième cas.* *Troisième cas.*

Quatrième cas.

FIG. 4. — *Résolution d'une équation du troisième degré par la méthode de Newton : les principaux cas de figures.*