108ème année (1997-1998) Novembre 1997 - Mensuel

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Étude de la suite $u_0 = a \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{u_n}$ dans le cas typique

par Hervé Lehning

Après avoir étudié la suite typique qui se trouve être non chaotique, puis l'ensemble limite d'une suite chaotique, nous avons été conduit à définir la notion de dynamique L-chaotique (voir [1] et [2]). Nous nous proposons ici d'illustrer cette définition par l'étude d'une suite récurrente simple, mais de comportement chaotique.

Partie I
Définition de la suite

1. Interprétation en termes de systèmes dynamiques

Soit f la fonction définie sur le compactifié $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{R}$ (il s'agit d'un espace métrique compact) par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R} \\ f(\infty) = \infty \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\hat{\mathbb{R}}$ et admet ∞ comme seul point fixe. On peut définit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ en posant :

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \qquad \text{(voir figure 1)}$$

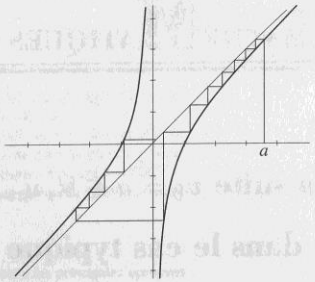

Figure 1

La suite donnée initialement est définie si et seulement si $u_n \neq \infty$ pour tout n ; elle est non définie si et seulement si a est un antécédent de ∞ par f.

2. Étude du domaine de non définition

Soit donc $(A_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de parties de $\hat{R}$ définie par :

$$\begin{cases} A_0 = \{\infty\} \\ A_{n+1} = f^{-1}(A_n) \end{cases}$$

La suite est non définie si et seulement si a appartient à l'ensemble $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Comme f est impaire, cet ensemble A est symétrique par rapport à 0.

Pour chaque x, $f^{-1}(x) = \{f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x)\}$ où f_1^{-1} et f_2^{-1} sont les fonctions définies sur $\hat{\mathbb{R}}$ par :

$$\begin{cases} f_1^{-1}(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+4}}{2} \\ f_1^{-1}(\infty) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_2^{-1}(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \\ f_2^{-1}(\infty) = \infty \end{cases}$$

On démontre ainsi par récurrence que A_n a 2^n éléments d'où l'on déduit que A est dénombrable. D'autre part, ∞ est point d'accumulation de A. En effet, A contient les points de la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = f_2^{-1}(x_n) \end{cases} \qquad \text{(voir figure 2).}$$

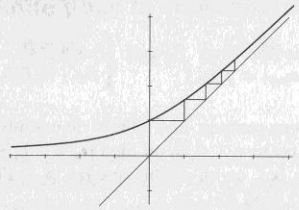

Figure 2

$f_2^{-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ donc la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie ; $f_2^{-1}(x) > x$ pour tout x donc la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est strictement croissante. Elle a donc une limite dans $[0, \infty]$. Comme $f_{2|[0,\infty]}^{-1}$ est continue cette limite est un point fixe de f_2^{-1} ; or le seul point fixe de f_2^{-1} est ∞ donc $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ et $x_n \neq 0$ pour tout n. On en déduit que ∞ est point d'accumulation de A.

A contient aussi les $y_n = f_1^{-1}(x_n) \in \mathbb{R}$. La suite (y_n) est strictement croissante, et $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$. Donc 0 est également point d'accumulation de A. Comme A est symétrique, il s'ensuit que dans tout voisinage de 0, il y a une infinité d'éléments de A à gauche comme à droite de 0.

Soit x un autre élément de A que 0 et ∞, $x = \varphi(0)$ où φ est la composée d'un nombre fini de f_1^{-1} et f_2^{-1} toutes les deux continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. φ est donc continue et strictement croissante, ainsi $\lim_{n \to +\infty} \varphi(y_n) = x$ et $\varphi(y_n) < x$ et $\lim_{n \to +\infty} \varphi(-y_n) = x$ et $\varphi(-y_n) > x$ pour tout n. Il s'ensuit que tous les éléments de A sont points d'accumulation à gauche comme à droite de A.

Ceci amène à conjecturer que tout point de $\hat{\mathbb{R}}$ est point d'accumulation de A. On considère donc B le complémentaire de l'adhérence de A que l'on suppose non vide. B est donc un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $]\alpha, \beta[$ $(\alpha < \beta)$ une de ses composantes connexes. Les deux points α et β appartiennent à l'adhérence de A et $]\alpha, \beta[\cap A = \emptyset$. Ainsi, α et β ne sont pas points d'accumulation à gauche et à droite donc n'appartiennent pas à A. En particulier, on a soit $0 < \alpha < \beta < \infty$ soit $\infty < \alpha < \beta < 0$. On se place dans le premier cas, il est facile d'adapter ce qui suit à l'autre. f est strictement croissante sur $]0, \infty[$ donc $f(\alpha) < f(\beta)$ et, comme f est continue, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont adhérents à A. S'il existe $x \in A$ tel que $f(\alpha) < x < f(\beta)$, $\alpha = f_2^{-1} \circ f(\alpha)$ et $\beta = f_2^{-1} \circ f(\beta)$ donc, comme f_2^{-1} est strictement croissante, $\alpha < f_2^{-1}(x) < \beta$ ce qui est absurde puisque $f_2^{-1}(x) \in A$. Ainsi, $]f(\alpha), f(\beta)[$ est une composante connexe de B et $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)\left[1 + \dfrac{1}{\alpha\beta}\right] > \beta - \alpha$.

De cette façon, on construit une suite de composantes connexes $]\alpha_n, \beta_n[$ de longueurs strictement croissantes (donc deux à deux disjointes) en posant :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_{n+1} = f(\alpha_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta_0 = \beta \\ \beta_{n+1} = f(\beta_n) \end{cases}$$

Le segment $[-1, 1]$ ne peut contenir une infinité de ces intervalles donc il existe N tel que, si $n \geqslant N$, alors ou bien $1 < \beta_n$ ou bien $\alpha_n < -1$. Supposons donc $\beta_N > 1$. Comme $1 \in A$ ($f^1(1) = \infty$), on en déduit que $\alpha_N > 1$ d'où $\alpha_{N+1} > f(1) = 0$ ce qui contredit $\alpha_{N+1} < -1$ d'où $\beta_{N+1} > 1$.

Par récurrence, on montre ainsi que $\beta_n > 1$ pour tout $n \geqslant N$. $f(x) < x$ si $x > 1$ donc la suite $(\beta_n)_{n \geqslant N}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers un nombre $\ell \geqslant 1$. Par continuité de f, on en déduit que $f(\ell) = \ell$, ce qui est contradictoire, donc $\alpha_N < -1$. On démontre alors que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant N}$ est croissante et majorée donc converge, ce qui est également absurde. Finalement, B est vide et donc A est dense dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'ensemble des points a tels que la suite ne soit pas définie est dense dans $\mathbb{R}$. On peut donc conjecturer que son comportement doit être particulièrement imprévisible. Pour préciser ceci, nous étudions l'ensemble des antécédents de tout nombre.

Partie II
Antécédents d'un nombre

Soit $x > 0$ (le raisonnement est le même si $x < 0$), on définit une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ en posant :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = f_2^{-1}(x_n). \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite d'antécédents de x de limite ∞. La suite $(f_1^{-1}(x_n))_{n \geqslant 0}$ est donc également une suite d'antécédents de x de limite 0.

Soit $]\alpha, \beta[$ ($\alpha < \beta$) un intervalle ouvert, $]\alpha, \beta[\cap A \neq \emptyset$, donc il existe n tel que f^n s'annule sur $]\alpha, \beta[$. On considère N le plus petit entier tel que f^N s'annule sur $]\alpha, \beta[$. f^N est continue et strictement monotone sur $]\alpha, \beta[$, donc $f^N(]\alpha, \beta[)$ est un intervalle ouvert contenant 0. Il contient donc un élément $f_1^{-1}(x_n)$. Soit donc $t \in]\alpha, \beta[$ tel que $f_1^{-1}(x_n) = f^N(t)$. On a $f^{N+n+1}(t) = x$, $]\alpha, \beta[$ contient donc au moins un antécédent de x. L'ensemble des antécédents de x est donc dense dans $\hat{\mathbb{R}}$.

Numériquement, cela signifie qu'une erreur sur la condition initiale peut mener à l'un quelconque des comportements possibles de la suite.

Partie III
Étude de la suite pour la condition initiale typique

Le sens du mot « typique » est étudié dans [1], nous rappelons ici sa définition :

Définition.

On appelle résiduelle toute partie de $\hat{\mathbb{R}}$ contenant l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses. On dit qu'une propriété $P(x)$ est typique si l'ensemble des points pour lesquels elle est vraie est résiduel.

Soit J l'ensemble des intervalles ouverts non vides à extrémités rationnelles, J est une base dénombrable d'ouverts de $\hat{\mathbb{R}}$. Soit U un élément de J de E_U l'ensemble des $x \in \hat{\mathbb{R}}$ tels qu'il existe un entier n tel que $f^n(x) \in U$.

Soit $x \in E_U$ et n tel que $f^n(x) \in U$. f^n est continue donc il existe un ouvert V contenant x tel que $f^n(V) \subset U$ donc $V \subset E_U$. Ainsi, E_U est voisinage de x. Ceci étant vrai pour tout $x \in E_U$, on en déduit que E_U est un ouvert.

Soit $x \in \hat{\mathbb{R}}$ et V un ouvert contenant x. Soit $t \in U$, l'ensemble des antécédents de t est dense dans $\hat{\mathbb{R}}$. Il en existe donc au moins un appartenant à V. Soit $\vartheta \in V$ et n un entier tel que $f^n(\vartheta) = t$. Donc $\vartheta \in E_U$. Ceci étant vrai pour tout voisinage ouvert V de x, on en déduit que le point x adhère à E_U et donc que E_U est dense dans $\hat{\mathbb{R}}$. Ainsi, E_U est un ouvert dense dans $\hat{\mathbb{R}}$.

Nous en déduisons que $E = \bigcap_{U \in J} E_U$ est une partie résiduelle.

Soit donc $a \in E$ et $x \in \hat{\mathbb{R}}$. Soit V un ouvert contenant x et $(V_p)_{p \geqslant 0}$ une suite d'éléments de J deux à deux disjoints et inclus dans V. $a \in E_{V_p}$ pour tout p donc il existe n_p tel que $u_{n_p} \in V_p$ ainsi V contient une infinité d'éléments de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$. Ceci étant vrai pour tout voisinage ouvert V de x, on en déduit que x est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

Ainsi, si a est typique, l'ensemble des valeurs d'adhérence $\omega(f, a)$ de $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est $\hat{\mathbb{R}}$.

Partie IV
Discontinuité de $a \longrightarrow \omega(f, a)$

La fonction $a \longrightarrow \omega(f, a)$ est une fonction définie sur $\hat{\mathbb{R}}$ à valeurs dans l'ensemble des compacts de $\hat{\mathbb{R}}$, $K(\hat{\mathbb{R}})$. Ce second espace est muni de la distance de Hausdorff

δ (voir [1]). Si $a \in E$, $\omega(f,a) = \hat{\mathbb{R}}$ et si $a \in A$, $\omega(f,a) = \{\infty\}$. $\delta[\{\infty\}, \hat{\mathbb{R}}] \neq 0$. Comme A ainsi que E sont denses dans $\hat{\mathbb{R}}$, cela implique que la fonction $a \longrightarrow \omega(f,a)$ est discontinue en tout point de $\hat{\mathbb{R}}$.

C'est dire la sensibilité de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par rapport à sa condition initiale.

Plus précisément, f possède les deux propriétés caractéristiques d'une dynamique L-chaotique (voir la définition dans [2]) :

(1) $\omega(f,x) = \hat{\mathbb{R}}$ pour x typique dans $\hat{\mathbb{R}}$.

(2) $x \longrightarrow \omega(f,x)$ possède un ensemble dense de points de discontinuité (ici $\hat{\mathbb{R}}$ tout entier).

Partie V
Généralisation

Tout ce qui précède se généralise facilement aux suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de la forme :

$$\begin{cases} u_0 = a \in X \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où X est une variété topologique compacte à bord et f une fonction continue de X dans lui-même vérifiant les propriétés suivantes :

- l'ensemble des antécédents de tout élément de X par f est dense dans X ;
- f admet au moins un cycle.

En particulier, ceci est le cas si f est une fraction rationnelle réelle dont l'ensemble de Julia contient $\hat{\mathbb{R}}$. Dans ce dernier cas, la suite est également chaotique au sens de Devaney (voir [3]), dans les autres cela n'est pas évident.

Bibliographie

[1] Hervé Lehning, *Étude de la suite récurrente typique*, RMS, décembre 1996.

[2] Hervé Lehning, *Ensemble limite d'une suite chaotique*, RMS octobre 1997.

[3] Robert L. Devaney, *Introduction to Chaotic Dynamical System*, Benjamin-Cummings, Menlo Park, 1986.