

Comment allouer les fréquences dans un réseau de téléphonie ? Pour optimiser le nombre de connexions, on ramène le problème à une question de pavage du plan. À plus grande échelle, on fait appel aux graphes. Et la solution n'est que partiellement connue.



© FANCÉLÉCOM

Coloriages pour allocation de fréquences

Difficile de les manquer au bord des autoroutes comme au sommet des immeubles : depuis une dizaine d'années, des antennes rectangulaires destinées à assurer les communications avec nos téléphones mobiles fleurissent par petits groupes en ville comme à la campagne. Dans le jargon des réseaux de téléphonie mobile, ces groupes s'appellent des « stations de base ». Comment permettent-elles de couvrir le territoire afin que nos conversations ne soient pas interrompues ?

L'utilisation d'antennes directionnelles permet à chacune de générer de une à quatre « cellules » de couverture

Hervé Lehning,
professeur
de mathématiques spéciales
au lycée Janson de Sailly.
herve.lehning@prepas.org

* **Le multiplexage temporel** désigne la technique permettant de convoier sur un même canal plusieurs émissions imbriquées les unes dans les autres, chacune étant décomposée en « paquets » de données envoyés toutes les 20 millisecondes.

radio. Si nous ne tenons pas compte des échos, rebonds et autres phénomènes électromagnétiques, chaque cellule correspond à un disque dont le centre est la station de base et le rayon dépend de la puissance de l'émetteur. En pratique, on la modélise par un hexagone légèrement plus petit car, s'il est impossible de paver le plan avec des disques, il est facile de le faire avec des carreaux hexagonaux. Ce modèle n'est évidemment pas réaliste mais permet de bien situer les difficultés.

Les cellules se recouvrent

Dans l'idéal, tout téléphone mobile doit se trouver dans une seule cellule. Dans la pratique, les cellules dépassent les hexagones et se recouvrent légèrement — de 15 % de leur surface environ. Toutefois, le téléphone est reconnu comme appartenant à une cellule et une seule même si, en pratique, il appartient à trois voire quatre cellules.

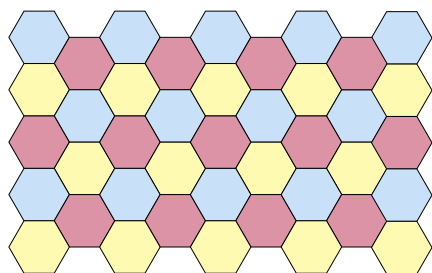
Chaque cellule est reliée au système central par téléphone filaire (ou satellitaire dans certains pays). Quand vous téléphonez, votre appel est détecté par la cellule dont vous dépendez. La connexion se fait par ondes hertziennes. Elle nécessite un canal pour l'émission et un autre pour la réception. L'appel

est ensuite transmis à la cellule dont dépend le téléphone de votre correspondant, qui lui envoie vos paroles. Là aussi, la connexion nécessite deux canaux. Quatre canaux sont donc nécessaires pour assurer une conversation. Comment les allouer ?

Chaque réseau téléphonique dispose d'un certain nombre de fréquences réparties sur deux bandes – 900 MHz pour la norme GSM (Global System for Mobiles) et 1 800 MHz pour la norme DCS (Digital Communication System). La portée de la bande GSM va de 300 mètres à 30 kilomètres, alors que la bande DCS va de 100 mètres à 4 kilomètres. Pour donner un exemple, Orange dispose de 50 canaux GSM sur l'ensemble du territoire (62 en zone dense) et 119 en DCS. Nous nous limiterons ici à la première bande.

Sur les 50 canaux, deux sont réservés au pilotage des mobiles (localisation, état, etc.), 24 sont consacrés à l'émission vers les téléphones, et les 24 autres à la réception. Comme un multiplexage temporel* permet de faire transiter huit conversations sur le même canal de fréquences, dans l'idéal, chaque cellule pourrait gérer 192 conversations simultanées [1]. Dans les zones également couvertes par les bandes DCS, nous passons à

Fig.1 Trois couleurs



LE PLAN EST PAVÉ EN UTILISANT UN MOTIF TRICOLEUR. Emboîtés en chevrons sur une ligne, les motifs sont retournés sur la ligne suivante, et ainsi de suite. À chaque couleur est attribué un tiers des fréquences.

[1] Gabriel Martin, « La démultiplication des fréquences », *La Recherche*, juillet-août 2003, p. 98.

700 conversations environ, toujours d'après l'exemple du réseau Orange. Mais, si chaque cellule allouait toutes les fréquences, des interférences se produiraient à ses frontières et les communications se brouilleraient entre elles. Si l'on suppose que les interférences n'apparaissent qu'au voisinage de deux cellules frontalières, alors on peut résoudre ce problème en s'assurant que deux cellules voisines ne font jamais appel aux mêmes fréquences. Pour cela, on procède à un pavage du plan en hexagones de trois couleurs différentes, où deux hexagones contigus n'ont jamais la même couleur. Par quel procédé ? On fabrique d'abord un motif de trois hexagones disposés en triangle, un bleu, un rouge et un jaune (ou un 0, un 1 et un 2, ce qui revient au même). On pave ensuite le plan en emboîtant ces motifs en chevrons dans un sens sur une ligne, dans l'autre sens sur la ligne suivante, et ainsi de suite [Fig. 1]. Le plan ainsi découpé, il ne reste plus qu'à attribuer un tiers des fréquences à chaque couleur. Ainsi, chaque cellule permet de gérer 64 lignes à la fois. Si l'on suppose maintenant que des interférences peuvent aussi survenir si les cellules sont séparées par une autre, alors il faut réaliser la même opération de pavage mais avec, cette fois, sept couleurs différentes. À nouveau, comment procède-t-on ? Le motif initial est un peu plus compliqué : il est constitué d'un hexagone entouré de

six autres. On colorie les sept hexagones avec sept couleurs différentes, puis on les emboîte les uns derrière les autres [Fig. 2]. De même que précédemment, il ne reste plus qu'à attribuer un septième des fréquences à chaque couleur. Chaque cellule GSM permet alors de gérer 27 lignes à la fois. Ce qui est peu ! Heureusement, ce cas de figure ne se rencontre en pratique que dans le cas d'un réseau serré, où l'on dispose donc d'une couverture bi-bande. Il est ainsi possible de gérer jusqu'à 100 lignes simultanément. Avec ce calcul, on peut déterminer la taille idéale des cellules en chaque point du territoire. Il suffit pour cela de connaître le nombre de communications potentielles au kilomètre carré dans chaque zone. En pratique, le diamètre des cellules varie de 250 mètres à 50 kilomètres suivant la densité de la population équipée d'un téléphone mobile.

Canaux inutilisés

À l'échelle d'un pays, on peut certes adapter la méthode de coloriage, mais il devient préférable de considérer le problème de façon plus générale. De plus, même si les méthodes fixes d'allocation de fréquences ont l'avantage de la simplicité, elles ne sont pas optimales. En effet, une cellule peut, à un instant donné, ne pas disposer d'un nombre suffisant de fréquences pour satisfaire toutes les demandes, alors que les cellules voisines disposent de

POUR EN SAVOIR PLUS

■ Xavier Lagrange, Philippe Godlewski et Sami Tabbane, *Réseaux GSM*, Hermès, Paris, 2000.

■ Colin Mac Diarmid, Bruce Reed, « Channel assignment and weighted colouring » ; *Networks*, 34, 114, 2000.

■ Un site consacré (en anglais) aux problèmes d'affectations de fréquences : <http://fap.zib.de>

* **Une clique** est un sous-graphe (restriction du graphe à une partie de ses sommets) complet. Un graphe est dit complet si tous ses sommets sont reliés par des arcs.

* **Un algorithme est dit distribué** quand il utilise plusieurs ordinateurs que l'on fait communiquer entre eux.

canaux inutilisés. Le réseau paraît ainsi saturé alors qu'il ne l'est que très localement.

Pour contourner ce problème, la solution réside dans l'utilisation de graphes. Considérons un graphe dont :

- 1) les sommets sont les cellules du réseau ;
- 2) les arcs joignent les cellules adjacentes ;
- 3) en un sommet C, on définit le poids p(C) qui est le nombre de fréquences demandées à C.

On colorie chaque sommet C avec p(C) couleurs, de sorte que deux sommets adjacents n'aient aucune couleur en commun. Là aussi, on peut se donner la contrainte que deux sommets séparés par un seul sommet n'aient aucune couleur en commun [Fig. 3]. Le nombre minimal de couleurs nécessaires pour terminer le coloriage s'appelle le nombre chromatique, noté χ . Le problème d'allocation de fréquences peut être résolu si et seulement si le nombre de fréquences du réseau est supérieur ou égal à χ .

Ce type de raisonnement fait toujours l'objet de recherches. En 2000, alors qu'ils travaillaient à l'université de Paris-VI, Bruce Reed et Colin Mac Diarmid ont livré une piste prometteuse. Ils ont montré que :

$$\chi \leq \frac{4}{3} \omega + 1$$

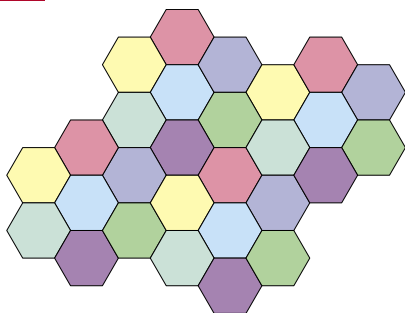
ω étant la somme maximale des poids d'une clique*. Ils ont aussi trouvé un algorithme distribué* pour trouver une coloration avec couleurs.

En outre, ils ont conjecturé qu'il existe une constante c telle que :

$$\chi \leq \frac{9}{8} \omega + c$$

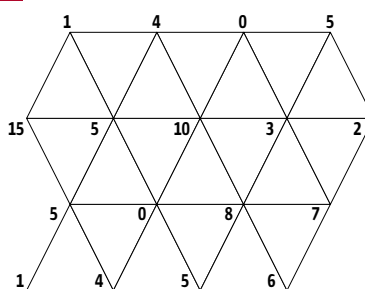
Si cette conjecture est vraie et que l'on trouve un algorithme distribué correspondant, cela signifie qu'avec un nombre de fréquences égal à N, on peut théoriquement satisfaire un réseau dont la clique maximale est inférieure à $\frac{8}{9}N$. En optimisant ainsi l'allocation de fréquences, on peut espérer ne plus se heurter à des réseaux saturés pour appeler à minuit pile le jour de l'an ! ■

Fig.2 Sept couleurs



LE PLAN EST PAVÉ EN HEXAGONES de sept couleurs différentes. Deux cellules de même couleur sont séparées par deux autres cellules.

Fig.3 Graphe pondéré



SUR UN GRAPHE PONDÉRÉ ASSOCIÉ À UN RÉSEAU CELLULAIRE, on colorie de sorte que chaque sommet ait le nombre de couleurs indiqué et que deux sommets adjacents n'aient aucune couleur commune.