102e année (1991-1992) Mai 1992 - Mensuel n° 9

Revue de Mathématiques Spéciales

L'harmonique transformée

par Hervé Lehning

Depuis quelque temps, une mode, peut-être inspirée des lectures assidues de Polya, Szegö et Dieudonné (voir [1] et [2]), pour l'étude de transformations diverses de la série harmonique m'a confronté au problème général de l'étude de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ où (ε_n) est une suite d'éléments de $\{-1, 0, 1\}$. Agacé de recommencer sans cesse des regroupements stupides de termes, j'ai ainsi accouché de deux théorèmes que je dédie à feu l'examinateur Dinet, saint patron de tous les examinateurs.

1. Les théorèmes des examinateurs.

1.1. Premier théorème.

La nature de la série harmonique transformée dépend de la différence des fréquences d'apparition des 1 et des -1. Plus précisément, si l'on note

$$\pi_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n},$$

on a le théorème suivant.

Théorème 1. *– Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi_n}{n}$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi_n}{n+1}.$$

Comme application, vous pouvez traiter les « grands classiques » suivants :

- En supprimant de la série harmonique usuelle tous les termes contenant un chiffre k donné dans leur écriture décimale (ou dans une autre base d'ailleurs), on obtient une série convergente.
- Si p est un entier strictement positif, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}$ converge. De façon plus générale, si la suite ε est périodique, la série converge si, et seulement si, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_p = 0$ pour une période p.
- Si vous connaissez la loi de répartition des nombres premiers, vous en déduirez que la série $\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$, où P désigne l'ensemble des nombres premiers, diverge.
- La série obtenue de la série harmonique en affectant les termes successivement d'un $+$, deux $-$, trois $+$, quatre $-$, cinq $+$ et ainsi de suite, est convergente.
- Vous pouvez facilement imaginer d'autres exercices amusants du même type. Par exemple, vous prenez un $+$, un $-$, deux $+$, trois $-$, cinq $+$, huit $-$, treize $+$, vingt et un $-$ et ainsi de suite comme les lapins de Fibonacci. Ou encore, vous pouvez vous inspirer de toutes suites d'entiers à la mode.

1.2. Second théorème.

Le premier théorème ne permet pas de calculer formellement la somme, ce qui est en fait possible en utilisant la fonction génératrice de la suite ε. Plus précisément, pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^{n-1}.$$

Théorème 2. *– La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ et l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, les sommes sont égales.*

Les calculs sont souvent praticables quand f est une fraction rationnelle, ce qui correspond au cas où la suite ε est périodique.

Comme applications, vous pourrez retrouver les calculs de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ ou vous attaquer aux « grands classiques » que sont devenus les calculs de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}$ ou de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}$ ou encore créer vos propres exercices à votre fantaisie.

2. Démonstrations.

Nous donnons ici les grandes lignes des démonstrations de ces deux théorèmes. Le reste est laissé au lecteur.

2.1. Premier théorème.

Pour la démonstration, il est utile de poser

$$s_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$$

et

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

• Les séries $\Sigma \frac{s_n}{n^2}$ et $\Sigma \frac{s_{n-1}}{n(n-1)}$ sont de même nature car $|s_n| \leqslant n$.

• On a

$$\frac{\varepsilon_n}{n} = \pi_n - \pi_{n-1} + \frac{s_{n-1}}{n(n-1)},$$

donc, si la suite (π_n) converge, alors les séries $\Sigma \frac{\varepsilon_n}{n}$ et $\Sigma \frac{s_n}{n^2}$ sont de même nature, ce qu'il fallait démontrer. Il reste donc à montrer que si l'une de ces séries converge, alors la suite (π_n) converge.

• Supposons donc que la série $\Sigma \frac{s_n}{n^2}$ converge et que la suite (π_n) ne converge pas vers 0. Il existe alors un $a > 0$ tel que, pour une infinité d'indices n, $|\pi_n| \geqslant a$. Soit n un tel indice, comme $|s_{k+1} - s_k| \leqslant 1$, $|s_k| \geqslant \frac{a}{2} n$ pour tout indice k vérifiant $n - \frac{a}{2}n \leqslant k \leqslant n + \frac{a}{2}n$ et, de plus, les s_k sont tous de même signe, donc

$$\left| \sum_{k=n-\frac{a}{2}n}^{n+\frac{a}{2}n} \frac{s_k}{k^2} \right| \geqslant \frac{a}{2}n \frac{an}{\left(n + \frac{a}{2}n\right)^2},$$

ce qui est contradictoire avec la convergence de la série.

• Supposons maintenant que la série $\Sigma \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge,

$$\pi_n = \frac{\sigma_1 + 2(\sigma_2 - \sigma_1) + \cdots + n(\sigma_n - \sigma_{n-1})}{n}$$

$$= \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_{n-1}}{n},$$

d'où le résultat d'après le théorème de Cesàro.

2.2. Second théorème.

Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème d'Abel sur les séries entières et de la réciproque de Litttlewood qui est applicable car la suite (ε_n) est bornée (voir [3] ou [4] pour une démonstration complète).

D'autre part, un calcul facile montre que si la suite ε est périodique, alors f est une fraction rationnelle. Réciproquement, supposons que f soit une fraction rationnelle. Il existe un polynôme

$$P = a_1 + a_2 X + \cdots + a_p X^{p-1}$$

(avec $a_p \neq 0$) tel que Pf soit un polynôme. Donc, à partir d'un certain rang,

$$a_1 \varepsilon_n + a_2 \varepsilon_{n-1} + \cdots + a_p \varepsilon_{n-p+1} = 0\,;$$

or, l'ensemble des solutions

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \{-1, 0, 1\}^p$$

de l'équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_p x_p = 0$ est fini. Le lecteur achèvera la démonstration.

Pour finir l'étude de ces séries remarquables, je proposerai un dernier théorème qui justifie sans doute leur attrait :

Tout nombre réel peut être représenté comme la somme d'une telle série.

Références.

[1] G. Polya et G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis*, I et II, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1980.

[3] J. Combes, *Suites et Séries*, PUF, Paris, 1982.

[4] E. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939.