LES POUVOIRS FASCINANTS DES MATHÉMATIQUES

Cela revient comme une rengaine : le niveau moyen des élèves français en mathématiques est de plus en plus médiocre et les étudiants sont de moins en moins nombreux à s'orienter vers l'enseignement de cette matière. Certes, les écarts de niveau entre élèves continuent de se creuser. Certes, la désaffection gagne du terrain. Mais tout n'est pas noir, loin de là ! Notre pays reste un gros pourvoyeur de mathématiciens de talent ; en témoigne le prix Abel 2017 remis à Yves Meyer. Et même si le trou n'est pas encore comblé, les universités constatent un léger rebond des inscriptions en licence de mathématiques depuis trois ans. D'autres initiatives existent pour susciter l'enthousiasme, telle la Maison des mathématiques. Le projet, initié par le mathématicien (et désormais député) Cédric Villani, devrait ouvrir à Paris, au printemps 2020. Il entend être un lieu d'interactions scientifiques, mais aussi un site ouvert au grand public, qui pourra découvrir comment les mathématiques changent notre monde. Exactement comme les cinq livres que nous vous proposons de découvrir dans ce dossier. ■

Vincent Glavieux

Par Hervé Lehning

Une beauté insoupçonnée

Dans l'opinion, quoi de plus opposés qu'art et mathématiques ? D'un côté, imagination et fantaisie, exprimant un ressenti à partir d'outils plastiques ; de l'autre, rigueur sévère et triste à l'aide d'outils abstraits. Pourtant, bien des mathématiciens voient en leur discipline un art, voire un courant artistique comme un autre. Comment expliquer cette contradiction ?

Imaginons un monde où, pour que chacun apprécie correctement la musique, son enseignement à l'école, au collège et au lycée serait limité au solfège, dont la maîtrise serait considérée comme indispensable pour chanter, jouer d'un instrument ou simplement écouter des morceaux. Le chant et les instruments ne seraient enseignés qu'ensuite, à l'université. Aucune œuvre de musique classique ou moderne ne serait étudiée ou même écoutée avant. Dans ce monde, seuls quelques spécialistes s'intéresseraient à ce domaine ; les autres n'y comprendraient rien, ne pensant qu'à l'horreur des dictées musicales sanctionnées par tant de zéros durant leur enfance !

Cette métaphore un peu folle du mathématicien américain Paul Lockhart (1) décrit la situation actuelle en mathématiques. On enseigne des règles, des techniques, des algorithmes sans jamais faire admirer une seule œuvre achevée. On apprend la technique sans dire à quoi elle sert, sans parler de culture ! De ce fait, la plupart des gens y voient une matière morte, inutile et sans intérêt.

Loin de cette opinion extrême, de nombreux mathématiciens considèrent leur discipline comme un art. Ainsi, le Britannique Godfrey Hardy affirmait en 1940, dans *L'Apologie d'un mathématicien* : *« Le mathématicien, comme le peintre ou le poète, est un faiseur de figures. Les figures du mathématicien, comme celles du peintre ou du poète, doivent être belles. Les idées, ainsi que les couleurs ou les mots, doivent s'assembler de façon harmonieuse. La beauté est le premier test : il n'y a pas de place dans le monde pour des mathématiques laides. »* Naturellement, la qualité première d'une démonstration est d'être juste, mais peu de mathématiciens s'en contentent : ils veulent aussi qu'elle soit élégante.

L'esthétique d'un théorème

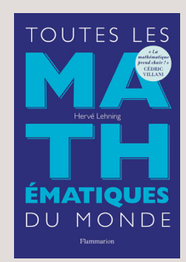
Bien sûr, en mathématiques comme partout ailleurs, le terme de beauté doit être défini. Certains seront séduits par la simplicité et l'élégance d'une formule ou, au contraire, par son caractère surprenant et énigmatique, par la clarté d'une démonstration ou les visions profondes d'une théorie. Mais l'essentiel est peut-être ailleurs, dans le plaisir de la conquête, à chaque jalon menant au but, au théorème et à sa preuve. Comme partout, le beau est associé au plaisir, et sa recherche à l'insatisfaction de l'artiste tant qu'il ne l'a pas atteint. Cette intuition est commune aux artistes et aux mathématiciens. Inutile d'étudier les mathématiques avancées pour s'en rendre compte. Les innombrables démonstrations du théorème de Pythagore l'illustrent. Leur nombre élevé ne vient pas d'un souci de mieux prouver le théorème, il vient de la recherche de l'esthétique. Certaines, très visuelles, font penser à des peintures de Piet Mondrian, aux découpages géométriques soignés. De même, comment ne pas être fasciné par les *sangaku*, dont le nom japonais indique que ce sont de petites tablettes mathématiques en bois ? On les trouve pendus dans des sanctuaires shintos et parfois des temples bouddhistes, au Japon. Ils datent de l'époque Edo (1600 à 1868), qui a précédé l'ère Meiji (1868-1912) pendant laquelle le Japon s'est occidentalisé. Malgré le lieu et une ressemblance formelle, ils ne correspondent pas aux ex-voto des églises, destinés à remercier Dieu d'une grâce obtenue. Ces petits tableaux peints, souvent esthétiques, représentent des figures mathématiques composées de droites et de cercles. Les commentaires échappent à ceux qui ne comprennent pas la langue, mais le mathématicien y voit un défi à relever, un problème à résoudre. Certains artistes contemporains, comme Jean Constant (2), s'en sont fait une spécialité, avec principalement un souci esthétique. De même, des objets mathématiques contemporains, comme les fractales avec leurs formes étonnantes, influencent un bon nombre d'artistes, tels Jos Leys et Jérémie Brunet (3).

Les mathématiques inspirent également de manière plus classique. Ainsi, à partir d'équations, Patrice Jeener (4) grave des surfaces qui prennent souvent des formes étranges. Ce mathématicien autodidacte a trouvé une partie de son inspiration auprès des modèles mathématiques de la bibliothèque de l'Institut Henri-Poincaré, à Paris. Bien avant lui, en les photographiant •••

HERVÉ LEHNING

NORMALIEN, AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, titulaire d'une maîtrise d'histoire des religions, Hervé Lehning a été professeur de mathématiques et d'informatique en écoles d'ingénieurs, puis en classe de mathématiques spéciales. Il se consacre entièrement, depuis 2010, à la vulgarisation scientifique en mathématiques, en informatique et en cryptologie. Son dernier ouvrage, *Toutes les mathématiques du monde,* est paru en novembre 2017 chez Flammarion.

PHILIPPE MATSAS/LEEMAGE

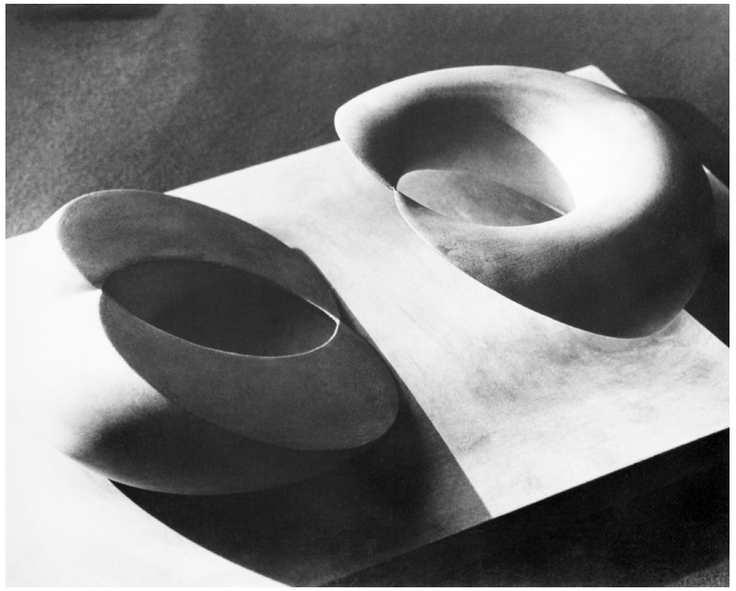


Flammarion,
437 p., 25 €.

Toutes les mathématiques du monde

« Réinsérer les mathématiques dans la culture générale » : voilà l'ambition de ce livre d'Hervé Lehning, qui s'intéresse depuis longtemps à la divulgation des mathématiques. Et il y réussit bien ! On se promène de la Mésopotamie à l'Australie, des premiers pas de l'abstraction chez les Grecs aux infinis de Cantor. Dans une partie plus actuelle, l'auteur révèle que les mathématiques sont vraiment partout, jusque dans les médias – qu'il égratigne au passage en montrant que l'usage des chiffres nécessite une culture statistique qui fait souvent défaut… Un ouvrage lisible et très complet.

••• dans les années 1930, Man Ray avait conféré à ces modèles le statut d'œuvres d'art. Voici comment il en parle dans son autobiographie : *« Parmi les photographies que je rapportais à Hollywood, il y avait tout un paquet d'épreuves faites dans les années trente, destinées à servir de modèles à une série de tableaux. Elles représentaient des objets en bois, en métal, en plâtre et en fil de fer qui, dans les vitrines poussiéreuses de l'Institut Poincaré, servaient d'illustrations à des équations algébriques. Ces équations n'avaient aucun sens pour moi, mais les formes des objets, en elles-mêmes, étaient aussi variées et aussi authentiques que celles que l'on trouve dans la nature.* […] *En les peignant, je ne les copiais pas exactement, mais composais de chacun d'eux un tableau.* […] *Quand j'eus terminé une quinzaine de ces tableaux, je leur donnai le titre général :* Équations shakespeariennes. *Pour son identification individuelle, chaque tableau portait le titre d'une pièce de Shakespeare, arbitrairement, le premier qui me passait par la tête. C'est ainsi que le dernier s'intitula :* Tout est bien qui finit bien. *Il se trouva des gens pour voir un rapport symbolique entre le sujet et le titre. »*



▲ *Ce cliché de Man Ray,* Objet mathématique, « Un plan bitangent à un tore le coupe suivant deux cercles », *datant de 1934, est en lien avec le théorème de Villarceau sur les cercles.*

© MAN RAY TRUST / ADAGP, PARIS, 2018 - CLICHÉ : TELIMAGE / ADAGP IMAGES

Pavages de l'Alhambra à Grenade

Avant ces artistes modernes, les apports essentiels des mathématiques aux arts graphiques se situaient dans deux domaines : la perspective et les pavages du plan. Chacun connaît les tableaux de la Renaissance donnant l'illusion de la profondeur grâce aux règles de la perspective découvertes à cette époque. Cette technique peut être subvertie de façon à créer des objets impossibles dans l'espace, comme l'ont fait le graveur Maurits Cornelius Escher, le plasticien Victor Vasarely, et bien d'autres. Le plus simple de ces objets a été utilisé par Escher pour dessiner sa fameuse cascade au mouvement perpétuel ou l'escalier montant sans cesse en revenant pourtant à son point de départ. L'invention de cette figure, souvent appelée escalier de Penrose, est attribuée au mathématicien britannique Roger Penrose, qui l'a signalée en 1950, mais elle était déjà dessinée en 1934 par l'artiste suédois Oscar Reutersvärd. Maurits Cornelius Escher est également célèbre pour ses pavages du plan. Avant lui, le mathématicien russe Evgraf Fedorov avait montré que, en reproduisant le même motif, on pouvait paver le plan de cinq façons différentes si on exclut de retourner le motif, auquel cas il faut en ajouter douze. Les cinq premières se rencontrent dans les pavages de l'Alhambra de Grenade. Il est plus difficile de trouver dans ce palais les douze autres types de pavage, même si certains affirment les avoir vus.

Des musiciens ont mis les décimales de pi en musique. L'effet est surprenant !

Les pavages évoqués jusqu'à présent sont tous périodiques, car formés à partir d'un seul motif que l'on déplace. Roger Penrose a découvert des pavages non périodiques, qui ont trouvé une application en chimie pour décrire la structure des quasi-cristaux. Ici encore, il est possible que Roger Penrose ne soit pas le véritable inventeur, car on trouve des pavages de ce type bien avant lui, en particulier dans un mausolée d'Ispahan daté du XVe siècle, le Darb-e-Imam.

Pour finir sur les mathématiques et l'art, évoquons la musique. De nombreux mathématiciens se sont confrontés à des problèmes musicaux : Pythagore, Galilée, Descartes et Euler, pour ne citer que quelques classiques. Par ailleurs, la théorie de Fourier permet de traiter les sons comme tous les signaux – cette remarque est au cœur des logiciels de compression d'images et de musiques. En outre, par nature, la musique fonctionne à l'aide de quantités discrètes, comme les notes et les mesures, elle se prête donc à des transpositions numériques. Ainsi, certains musiciens ont mis les décimales de pi en musique. Par exemple, David MacDonald a associé à chaque chiffre de 0 à 9 la note d'une gamme (7 notes) dans l'ordre croissant. Comme il y a dix chiffres, il utilise l'octave supérieure de la gamme pour les chiffres 7, 8 et 9. Il ajoute ensuite un accompagnement à la main gauche – les décimales de pi sont jouées uniquement par la main droite. L'effet est surprenant !

Montée sonore infinie

Mis à part l'utilisation des décimales d'un nombre, cette façon de faire reste classique. Roger Shepard, chercheur américain spécialisé en psychologie cognitive, a repris l'idée de l'escalier de Penrose pour créer un son semblant monter dans la gamme à l'infini. On peut réaliser cette illusion sonore de façon classique en utilisant trois instruments. Pour cela, on fait jouer à chacun un do, mais dans une octave différente, puis on les fait monter dans la gamme : ré, mi, etc. Quand on atteint le do de l'octave suivante, l'instrument qui jouait dans l'octave la plus haute descend de trois octaves. Ce changement passe inaperçu car les deux autres instruments continuent à monter dans la gamme. On obtient ainsi la même illusion d'une montée infinie que celle de l'escalier de Penrose. À la suite de Roger Shepard, Jean-Claude Risset, spécialiste de l'informatique musicale, a créé une version continue de cette montée infinie, le glissando de Shepard-Risset (5). Il a également mis en œuvre une musique similaire, où le tempo semble accélérer ou décélérer indéfiniment.

À travers tous ces exemples, nous voyons les liens entre mathématiques et art dissimulés par un enseignement qui ne s'attache qu'au côté technique. Pourquoi ne pas faire connaître ces questions montrant la proximité entre art et mathématiques ? ■

(1) Paul Lockhart, *La Lamentation d'un mathématicien,* L'Arbre de Diane, 2017.

(2) Jean Constant, *Digital Sangaku (Part I & Part II),* Blurb books, 2013.

(3) www.josleys.com ; Jérémie Brunet, *L'Art fractal,* Pole, 2014.

(4) www.patricejeener.fr

(5) R. Shepard, *J. Acoust. Soc. Am., 36,* 2346, 1964 ; J.-C. Risset, *J. Acoust. Soc. Am., 80,* 961, 1986.

Extraits du livre de Jordan Ellenberg

L'art de ne pas dire n'importe quoi

Le mathématicien Jordan Ellenberg montre, dans son dernier ouvrage, comment statistiques et logique permettent d'éviter des pièges de la vie courante et donnent du sens à certaines questions, qu'il s'agisse de sciences, d'économie… ou de basket-ball !

« Je n'aime pas les problèmes « issus de la vie courante ». Ils donnent une image fausse du rapport entre mathématiques et réalité. « Bobby a 300 billes ; il en donne 30 % à Jenny. Il donne à Jimmy la moitié de ce qu'il a donné à Jenny. Combien lui reste-t-il de billes ? » Cela ressemble au monde réel, mais ce n'est qu'un problème d'arithmétique sous un déguisement peu convaincant. Le problème n'a rien à voir avec les billes. On pourrait tout aussi bien vous dire : « Tapez 300 – (0,30 x 300) – (0,30 x 300) / 2 = » sur votre calculette et recopiez la réponse !

Mais les questions du monde réel ne ressemblent pas à ce type d'énoncés. Un problème dans le monde réel, c'est quelque chose comme : « La récession et ses suites ont-elles été particulièrement dures pour l'emploi des femmes, et dans ce cas, dans quelle mesure est-ce le résultat de l'administration Obama ? » Votre calculette n'a pas de bouton pour ça. Car pour donner une réponse ayant un sens, vous devez connaître autre chose que de simples chiffres. Quelle forme ont les courbes de perte d'emploi des hommes et des femmes dans une récession typique ? Cette récession précise était-elle notablement différente à cet égard ? Dans quels types d'emplois les femmes sont-elles largement majoritaires, et quelles décisions Obama a-t-il prises qui affectent ce secteur de l'économie ? Ce n'est qu'après avoir formulé ces questions que vous pouvez prendre votre calculette. Mais à ce point, le véritable travail intellectuel est déjà terminé. Diviser un nombre par un autre, ce n'est que du calcul ; savoir ce que vous devez diviser par quoi, ça, c'est des mathématiques. […]

« Ce que les fans de basket appellent « la main chaude » est l'incapacité apparente à manquer un tir, quelles que soient la distance et la qualité de la défense adverse.

Sauf que cette « main chaude » n'est pas censée exister. En 1985, dans un article célèbre en psychologie cognitive, Thomas Gilovich, Robert Vallone et Amos Tversky (désignés ici comme GVT) •••