Les valeurs de Π

Petit essai de mathématiques sérieuses quoique humoristiques par Hervé Lehning

En 1897, une résolution impliquant (entre autres valeurs) que $\pi = 4$ fut proposée au vote des représentants de l'état de l'Indiana (États-Unis). Avant de sourire, une question : pour quelle notion de distance ?

Qu'est-ce que π ? Voici fort longtemps, Archimède répondit à cette question : il s'agit du rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Qu'est-ce qu'un cercle ? L'ensemble des points d'un plan, disons R^2 pour simplifier, à égale distance d'un point donné. Qu'est-ce que la distance ? Ici, nous ne pouvons que marquer une pause dans nos réponses toutes faites. Plusieurs distances sont possibles !

Distances dans le plan

Le champ est très vaste, nous nous limiterons donc aux distances données par des normes et même aux plus classiques d'entre elles. Celles-ci ont l'avantage de nous proposer des cercles homothétiques les uns des autres si bien que nous pouvons nous limiter au cercle de centre O et de rayon unité pour lequel, dans tous les cas, le diamètre est égal à 2.

La distance la plus simple nous vient de la norme infinie :

$$\| (x, y) \|_\infty = \max (| x |, | y |)$$

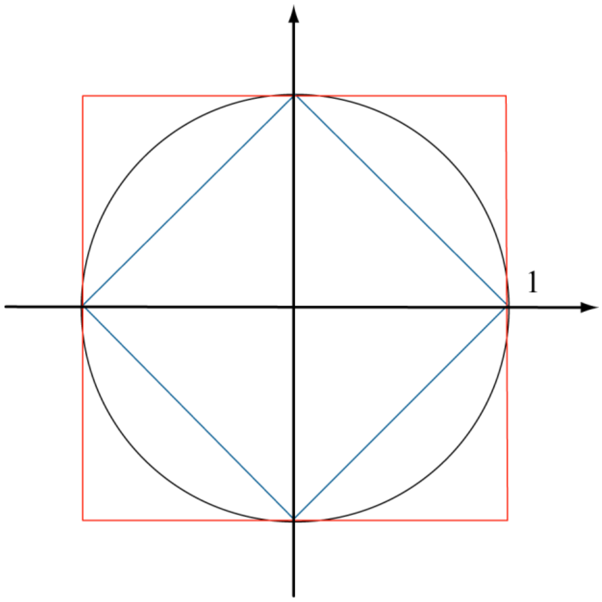
Le cercle unité a alors la forme d'un carré, sa circonférence est égale à 8 donc, pour cette distance, $\pi_\infty = 4$. En poursuivant notre étude des distances usuelles, nous rencontrons la norme un :

$$\| (x, y) \|_1 = | x | + | y |$$

Le cercle unité a alors la forme d'un losange, sa circonférence est toujours égale à 8 donc, pour cette distance, on a également $\pi_1 = 4$.

On pourrait en conclure que $\pi = 4$ est la valeur la plus raisonnable à retenir. D'ailleurs, quand les rues des villes se coupent à angle droit, la norme infinie est sans doute la plus pertinente.

Est-ce pour cette raison qu'une loi pouvant conduire à l'adoption de la valeur $\pi = 4$ fut proposée au vote de l'assemblée générale de l'état de l'Indiana ?



Cercles unités pour les trois normes usuelles du plan : en bleu, celui pour la norme 1, en noir, celui pour la norme 2 et en rouge, celui pour la norme ∞.

Vous pouvez en juger vous-même en allant lire le texte plein d'humour de ce projet de loi sur l'Internet (utilisez un moteur de recherche pour en trouver une copie). Nous laisserons de toutes façons la question aux amateurs d'histoire pour nous consacrer à la norme qui prévaut chez les arpenteurs :

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pour celle-ci, les calculs sont plus ardus. Il nous faut recourir au calcul intégral ! Tout d'abord, commençons par paramétrer le cercle ou plutôt sa partie comprise dans le premier quadrant, entre l'axe des *x* et la première bissectrice. Nous obtenons :

$$\begin{array}{ccl} [0, \pi/4] & \to & \mathrm{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) \left| \begin{array}{l} \cos t \\ \sin t \end{array} \right. \end{array}$$

d'où l'on déduit :

$$\pi_2 = 4 \int_0^{\pi/4} \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}(t) \right\|_2 \mathrm{d}t = 4 \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}t = \pi$$

nombre vedette dont on a déjà calculé beaucoup de décimales.

Autres normes

Les trois normes utilisées se généralisent en utilisant un nombre $p \geq 1$ quelconque. Plus précisément, on pose :

$$\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$$

Un calcul simple montre que le cas $p = \infty$ est bien un cas limite. Le calcul du cas $p = 2$ se généralise et on trouve :

$$\pi_p = \frac{8}{p}\int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 t \tan^p t + \sin^2 t \cot^p t\right)^{1/p} \mathrm{d}t$$

à défaut de pouvoir calculer π_p, cette formule permet de le tabuler, entre 1 et 2 nous trouvons :

p	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
π_p	4,000	3,757	3,573	3,434	3,333	3,260	3,209	3,176	3,155	3,145	3,142

Ainsi, la fonction $p \mapsto \pi_p$ semble décroissante entre 1 et 2. Quand nous la tabulons entre 2 et l'infini, le phénomène inverse se produit. Ces calculs nous amènent à faire les trois conjectures suivantes :

1) π est la valeur minimale des π_p,

2) π_p prend toutes les valeurs entre π et 4,

3) $\pi_p = \pi_q$ si $1/p + 1/q = 1$.

La seconde de ces trois conjectures est la plus simple à démontrer. Il suffit pour cela de prouver que la fonction $p \mapsto \pi_p$ est continue ce qui résulte du théorème de continuité sous le signe somme.

Minimum de π

Une stratégie pour démontrer que le minimum de la fonction $p \mapsto \pi_p$ est bien atteint pour $p = 2$ serait de dériver cette fonction sous le signe somme et d'étudier le signe de sa dérivée.

Malheureusement, cette démarche aboutit à des calculs inextricables. Nous le démontrons en nous ramenant à une intégrale dont la dérivée est plus simple en partant de l'inégalité de Hölder (voir plus loin) :

$$\left(\cos^{2p-2} t + \sin^{2p-2} t\right)^{1/p} \geq \cos^{4\frac{p-1}{p}} t + \sin^{4\frac{p-1}{p}} t$$

En la portant dans l'expression de π_p, on obtient $\pi_p \geq f(p)$ avec :

$$f(p) = \frac{8}{p} \int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 t \tan^{2/p-1} t + \sin^2 t \cot^{2/p-1} t\right) \mathrm{d}t$$

ce que l'on peut également écrire :

$$f(p) = \frac{8}{p} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \tan^{2/p-1} t \,\mathrm{d}t$$

et en intégrant par parties :

$$f(p) = 16 \int_0^{\pi/2} \tan^{2/p} t \cos^3 t \sin t \,\mathrm{d}t$$

Le théorème de dérivation sous le signe somme est applicable, ce qui donne :

$$f'(p) = -\frac{32}{p^2} \int_0^{\pi/2} \ln(\tan t) \tan^{2/p} t \cos^3 t \sin t \,\mathrm{d}t$$

En scindant cette intégrale en deux, on obtient alors :

$$f'(p) = -\frac{32}{p^2} \int_0^{\pi/4} \ln(\tan t) \tan^{2/p} t \sin^3 t \cos t \frac{\tan^{4/p-2} t - 1}{\tan^{2/p} t} \mathrm{d}t$$

qui est positif si $p > 2$ et négatif si $p < 2$. qui est positif si $p > 2$ et négatif si $p < 2$. On en déduit que f admet un minimum en $p = 2$ donc $f(p) \geq \pi$ pour tout p d'où :

$$\pi_p \geq \pi \text{ pour tout } p.$$

Comme cette inégalité est une égalité pour $p = 2$, on en déduit que la valeur minimale de π_p est π. On en déduit également que deux normes (et deux normes seulement) justifient la valeur $\pi = 4$, ce sont la norme un et la norme infinie.

Inégalité de Hölder utilisée

Nous avons utilisé une version simple de l'inégalité de Hölder : si p et q sont deux nombres strictement positifs tels que $1 / p + 1 / q = 1$ et a_1, a_2, b_1, b_2 quatre nombres positifs alors :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \le \left(a_1^p + a_2^p\right)^{1/p} \left(b_1^q + b_2^q\right)^{1/q}$$

et nous appliquons cette inégalité pour :

$$a_1 = b_1 = \cos^{2-2/p} t \quad a_2 = b_2 = \sin^{2-2/p} t$$