



Quand il y a plus de candidats que de places, comment attribuer celles-ci de façon juste et équitable ? Déjà complexe à petite échelle, ce problème devient redoutable quand les candidats sont plusieurs dizaines de milliers.

Pour plus d'équité, marions-les !

Comment affecter 70 000 candidats aux classes préparatoires aux trois cents établissements français qui peuvent les accueillir ? Dans la plupart des cas, l'objectif d'un élève est d'intégrer l'école qui possède la meilleure renommée. Les lycées, eux, cherchent à recruter les bacheliers les plus brillants. Les critères sont simples, mais les choix difficiles à faire pour contenter le plus de monde possible.

Affectation des internes

Si les élèves remplissent trois cents dossiers de candidature chacun, alors chaque établissement peut classer les candidats et recruter ceux qu'il juge les meilleurs. Si le plus demandé a mille places à offrir, il appelle les mille premiers, qui viennent tous. Que se passe-t-il pour le suivant ? S'il a aussi mille places, combien doit-il accepter d'étudiants ? Mille, et il risque d'être vide. Deux mille, sans doute. Pour les autres, le problème se complique. Tous sont amenés à pratiquer la *surbooking*, c'est-à-dire à proposer plus de places qu'ils ne peuvent réellement en offrir. À la fin du processus, certains établis-

Hervé Lehning
professeur
de mathématiques
spéciales au lycée
Janson-de-Sailly, à Paris.
hervé.lehning@prepas.org

[1] D. Gale et L. Shapley,
*American Mathematical
Monthly*, 69, 9, 1962.

sements seront surchargés, d'autres seront vides.

Ce problème s'est posé aux États-Unis dans les années 1950 dans le cadre de l'affectation des internes aux hôpitaux. Une nouvelle méthode a alors été élaborée de façon empirique, pour être ensuite peu à peu adoptée dans d'autres régions du monde. En France, elle s'applique notamment pour les affectations en classes préparatoires depuis 2003.

En quoi consiste-t-elle ? Pour l'expliquer, David Gale et Lloyd Shapley, les premiers à l'avoir publiée dans un journal mathématique dans les années 1960, font appel à la métaphore du mariage [1]. Des « hommes » jouent le rôle des établissements, tandis que des « femmes » jouent celui des candidats ; le but est de réaliser des « mariages stables » — il ne doit pas y avoir un homme (une femme) qui préfère une autre femme (un autre homme) à son conjoint. Pour cela, les hommes et les femmes désignent au préalable des conjoints « potentiels » parmi les personnes du sexe opposé, puis les classent sans *ex aequo*. David

Gale et Lloyd Shapley ont montré qu'il existe au moins une manière stable de les marier. Bien sûr, il peut y avoir des « laissés-pour-compte » (des personnes qui ne trouvent pas de conjoint), mais ce sont les mêmes dans toutes les solutions stables.

Les femmes disposent

Pour construire une solution stable, Lloyd Shapley a proposé un algorithme fondé sur l'idée selon laquelle « l'homme propose, la femme dispose ». Les hommes font d'abord des propositions de mariage ; les femmes les rejettent ou les acceptent. À la première étape, chaque homme propose le mariage à la femme qu'il préfère sans tenir compte d'éventuels concurrents. À ce moment, chaque femme accepte la proposition qu'elle préfère parmi celles qu'elle a reçues. Elle se « fiance » alors en rompant éventuellement des fiançailles précédentes. Les femmes qui ne reçoivent aucune proposition de mariage attendent l'étape suivante. Quand celle-ci arrive, les hommes déjà fiancés ne font rien, tandis que les autres font une proposition aux femmes qui ne les ont pas déjà refusés. Le processus se poursuit de cette manière tant que cela est possible.

Le temps d'exécution de cet algorithme est au plus proportionnel au produit du nombre d'hommes par celui des femmes — il est donc toujours possible à un ordinateur de le mener à bien dans un délai bref. L'algorithme conduit à des mariages stables car, si un homme préférerait une



QUELQUE 70 000 ÉTUDIANTS se portent candidats chaque année aux classes préparatoires en France. La méthode d'affectation privilégie les établissements au détriment des préférences exprimées par les élèves dans leur ensemble. © BORDAS/SIPA

autre femme à son épouse, celle-ci l'aurait rejeté au cours de la procédure. Pour la même raison, il épouse la femme qu'il préfère parmi toutes les femmes possibles pour avoir des configurations stables. Les hommes ne peuvent donc être mieux lotis. En revanche, les femmes ne pourraient être plus mal servies dans l'ensemble des solutions stables... Appliquée à l'affectation des bacheliers aux classes préparatoires, cette méthode offre donc aux établissements les candidats qu'ils préfèrent au détriment des préférences exprimées par les élèves dans leur ensemble — ce qui ne signifie pas qu'aucun candidat n'aura son premier choix.

Les candidats ont-ils dès lors intérêt à mentir lorsqu'ils forment leurs préférences ? Peut-être, mais il est difficile d'envisager une stratégie applicable par un étudiant dans le cadre, par exemple, de l'affectation en classes préparatoires. Il faudrait en effet que le bachelier connaisse au moins tous les autres classements. Il serait ainsi à même d'en déduire la solution sta-

ble fournie par l'algorithme afin de tenter de la rendre instable en modifiant ses préférences.

Entente entre candidats

En revanche, une telle stratégie est envisageable pour les candidats à des postes de professeur en université. En effet, si, comme pour les classes préparatoires, les universités examinent puis classent les candidats, elles rendent en revanche public ce classement avant que les candidats n'arrêtent leurs souhaits. Cette publication change tout car, connaissant les souhaits des universités, certains candidats peuvent s'entendre entre eux pour modifier leurs préférences et manipuler ainsi le résultat de l'algorithme. Seule parade : inverser l'algorithme en laissant les « femmes » choisir [2]. Mais alors ce seront les universités qui seront les moins bien servies...

Mis à part les applications classiques d'affectation d'étudiants dans des institutions, de travailleurs sur des postes, de clients à des fournisseurs..., les mariages stables servent aussi à cou-

pler des émetteurs avec des récepteurs dans des réseaux de communication. Ils permettent ainsi de résoudre le problème de l'accès Internet à haut débit dans un train à grande vitesse.

Chaque point d'accès à Internet couvre un disque d'environ 100 mètres de rayon. Pour assurer un débit constant lors d'un déplacement lent, on peut imaginer de répartir ces points d'accès le long des voies afin que l'utilisateur en change de façon régulière. À 300 kilomètres par heure, cette solution devient inefficace car un passager traverse une zone en moins de trois secondes.

Petits paquets de données

Daniel Ho et Shahrokh Valaee, informaticiens à l'université de Toronto, au Canada, ont récemment imaginé un autre système dans lequel des relais sont répartis le long des voies et des antennes sur les trains. Les fichiers sont découpés en petits paquets pour être transmis depuis des relais vers les antennes. À tout instant, en fonction de la proximité, un même nombre N de relais et d'antennes doivent être appariés pour assurer la transmission de N paquets. Chaque antenne (chaque relais) classe les relais (les antennes) en fonction de la qualité de la communication. L'appariement se fait en résolvant un problème de mariages stables avec l'algorithme de Gale-Shapley [3]. Ce résultat est surprenant dans sa simplicité car l'algorithme ne donne que l'appariement optimal pour les « hommes » (ici les relais).

Dans la pratique, il est plus intéressant de considérer, parmi tous les appariements stables, celui qui optimise une certaine fonction (la qualité de la communication par exemple). L'algorithme de Gale-Shapley ne permet pas de faire ce choix. Une piste de recherche actuellement explorée pour résoudre ce problème plus général a été suggérée par Michel Balinski et Guillaume Ratier du laboratoire d'économétrie de l'École polytechnique : la solution serait de traduire le problème en termes de graphes [4]. ■

[2] M. Baiou et M. Balinski, *American Mathematical Monthly*, 110, 386, 2003.

[3] D. Ho et S. Valaee, *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 3, 271, 2005.

[4] M. Balinski et G. Ratier, *SIAM Review*, 39, 575, 1997.

POUR EN SAVOIR PLUS

■ M. Baiou et M. Balinski, *Mathematics of Operations Research*, 3, 485, 2002.