PAS SI SIMPLE

BAC TO BASICS

«C'est tellement simple qu'un enfant de 5 ans le comprendrait. Qu'on aille me chercher un enfant de 5 ans!» Groucho Marx

Apparus sous le nom d'« imaginaires » à la Renaissance, les nombres complexes ont envahi les mathématiques et leurs domaines d'application. Contrairement à ce que laisse penser leur nom, ces nombres simplifient bien des calculs en prise avec la réalité.

Les nombres complexes

Hervé Lehning,
professeur de mathématiques spéciales au lycée Janson-de-Sailly.
Herve.lehning@prepas.org

Qui a imaginé les imaginaires ?

Les algébristes italiens de la Renaissance tels que, au XVI^e siècle, Nicolo Tartaglia et Jérôme Cardan cherchaient à résoudre des équations provenant de questions arithmétiques d'origine financière, comme le calcul du taux effectif d'un prêt, ou géométriques, comme la trisection de l'angle ou l'intersection de coniques. L'inconnue y était considérée comme une « quantité », la notion de nombre étant encore floue. Ils cherchaient des solutions positives, et évitaient soigneusement l'usage de nombres négatifs. Pour ce faire, ils manipulaient les équations de façon astucieuse en opérant des changements de membres ou de variables selon la méthode proposée au IX^e siècle par le savant arabe Al Khwarizmi. Par exemple, en ajoutant 9 à chaque membre de l'équation : $x^2 + 6x = 7$ puis en posant : $y = x + 3$, nous la ramenons à l'équation plus simple : $y^2 = 16$.
En cherchant à résoudre l'équation du troisième degré : $x^3 = 15x + 4$ par une méthode de ce type, Cardan obtint une équation intermédiaire *a priori* impossible : $y^2 = -121$. Un carré devait être négatif, il aurait dû s'arrêter là ! Pourtant, il continua en utilisant un nombre qu'il nota $\sqrt{-1}$ pour signifier que son carré était égal à -1. *A priori,* cela est impossible puisque tout carré est positif. Pourtant, grâce à cet artifice, Cardan obtint finalement le nombre 4 comme racine de l'équation proposée. Ce résultat est exact ! Cette démarche lui permit donc de trouver une solution réelle de l'équation. Très vite, les algébristes constatèrent que ces nombres – qualifiés d'imaginaires par René Descartes au XVII^e siècle – fournissaient des solutions acceptables, ce qui en légitima l'usage sans pour autant en expliquer ni le sens ni l'efficacité.

Peut-on écrire √(– 1) ?

Bien sûr, mais on l'évite dans l'enseignement secondaire français. Pourquoi ? Tout simplement parce que cette écriture peut être à l'origine d'erreurs. L'égalité $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ se généralise en : la racine d'un produit est égale au produit des racines..., ce qui est faux si les deux nombres sont négatifs ! Testons-le sur -1 compté deux fois.

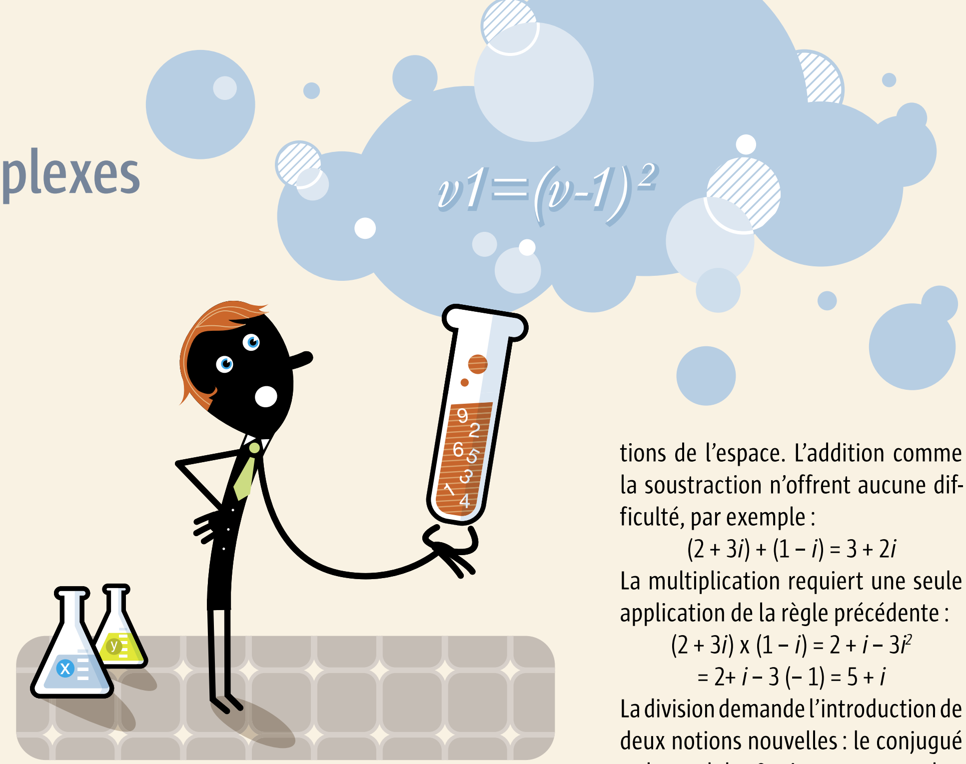
$$\sqrt{(-1 \times -1)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$$
$$\sqrt{1} = (\sqrt{-1})^2$$
$$1 = -1$$

On arrive donc au résultat absurde : $1 = -1$. Cela n'empêche pas la notation $\sqrt{-1}$ d'être employée dans le monde anglo-saxon, moins dogmatique. L'important est de n'utiliser, outre les règles usuelles, que celle-ci : le carré de $\sqrt{-1}$ est égal à -1.
Depuis Leonhard Euler, on emploie de préférence le symbole *i* (initiale d'impossible et d'imaginaire) pour désigner ce nombre. Les physiciens lui substituent la lettre *j* car, pour eux, *i* désigne l'intensité d'un courant.

Les complexes sont-ils compliqués ?

Au contraire, ils simplifient les calculs. Ce nom de « complexe » a été ⇨

Les nombres complexes



⇨ proposé par Carl Friedrich Gauss au début du XIXe siècle. Pour ce mathématicien allemand, les mathématiques étaient ancrées dans la réalité physique : il n'appréciait donc pas le terme d'imaginaire.

Afin de comprendre en quoi l'usage des complexes est simplificateur, considérons l'équation du second degré générale $x^2 + 2ax + b = 0$, où a et b sont des nombres réels. On peut l'écrire de cette façon :

$$x^2 + 2ax + a^2 - a^2 + b = 0$$
$$(x + a)^2 = a^2 - b$$

Rester dans le champ réel oblige à distinguer trois cas suivant que le nombre $a^2 - b$, noté Δ et appelé discriminant, est positif, nul ou négatif.

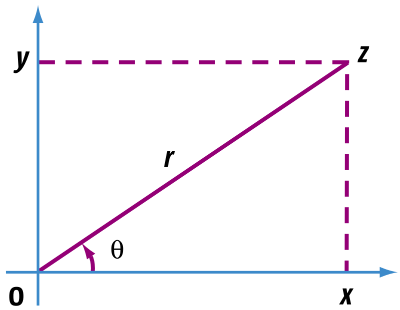
Dans le premier cas, l'équation a deux solutions qui s'écrivent en fonction de la racine carrée du discriminant $-a \pm \sqrt{\Delta}$. Ces deux solutions se confondent dans le second cas, l'équation n'en a donc qu'une. Dans le troisième cas, l'équation n'a pas de solution.

En nous plaçant dans le champ complexe, ce dernier cas fusionne avec les autres puisque le discriminant a alors une racine carrée imaginaire (i multiplié par $\sqrt{|\Delta|}$). Les solutions sont complexes et de la même forme que précédemment ($-a \pm \sqrt{\Delta}$).

Ce résultat reste vrai si les coefficients de l'équation sont complexes, car tout nombre complexe a une racine carrée. Plus généralement, une équation à coefficients réels ou complexes a un nombre de solutions égal à son degré. Ce théorème, attribué à Jean le Rond d'Alembert, a été démontré par Gauss.

Fig.1 Représentation d'un nombre complexe

À UN NOMBRE COMPLEXE $z = x + iy$ on associe son affixe, c'est-à-dire le point de coordonnées x et y, noté également z sur la figure. On note r la longueur Oz et θ l'angle orienté (Ox, Oz) compté en radians. Les relations trigonométriques dans le triangle fournissent les relations : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, d'où l'égalité : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$.



Alors, pourquoi ce dernier a-t-il choisi ce nom de nombres complexes si leur usage est simplificateur ? Il signifie en fait qu'ils sont composés de deux nombres réels. Plus précisément, tout nombre complexe a une forme dite cartésienne : $x + iy$, où x est appelé la partie réelle, et y la partie imaginaire. Les nombres réels sont des cas particuliers de complexes, ceux dont la partie imaginaire est nulle. De façon symétrique, les nombres dont la partie réelle est nulle sont dits imaginaires purs.

Les complexes sont-ils des nombres ?

Oui, ils forment un « corps » comme les rationnels ou les réels, c'est-à-dire que l'on définit sur leur ensemble les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) et qu'elles y ont les propriétés habituelles comme l'associativité, la commutativité et la distributivité. Comment ? Il suffit d'ajouter aux règles usuelles, la convention : $i^2 = -1$. Cette idée est due à William Hamilton, qui la généralisa pour inventer les « quaternions », des nombres plus généraux permettant de décrire les rotations de l'espace. L'addition comme la soustraction n'offrent aucune difficulté, par exemple :

$$(2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i$$

La multiplication requiert une seule application de la règle précédente :

$$(2 + 3i) \times (1 - i) = 2 + i - 3i^2$$
$$= 2 + i - 3(-1) = 5 + i$$

La division demande l'introduction de deux notions nouvelles : le conjugué et le module. Conjuguer un nombre complexe, c'est changer sa partie imaginaire en son opposée. Ainsi, le conjugué de $z = 2 + 3i$ est $\bar{z} = 2 - 3i$. Le module d'un nombre complexe est la racine carrée de la somme des carrés de ses parties réelles et imaginaires. Ainsi, le carré du module de $z = 2 + 3i$ est $|z|^2 = 4 + 9 = 13$.

D'après l'égalité : $i^2 = -1$,
$(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$
le produit d'un nombre par son conjugué est égal à son module au carré ($z \times \bar{z} = |z|^2$). On en déduit que tout nombre complexe non nul est inversible et que son inverse est égal à son conjugué divisé par son module au carré. Ainsi, celui de $2 + 3i$ est $(2 - 3i)/13$.

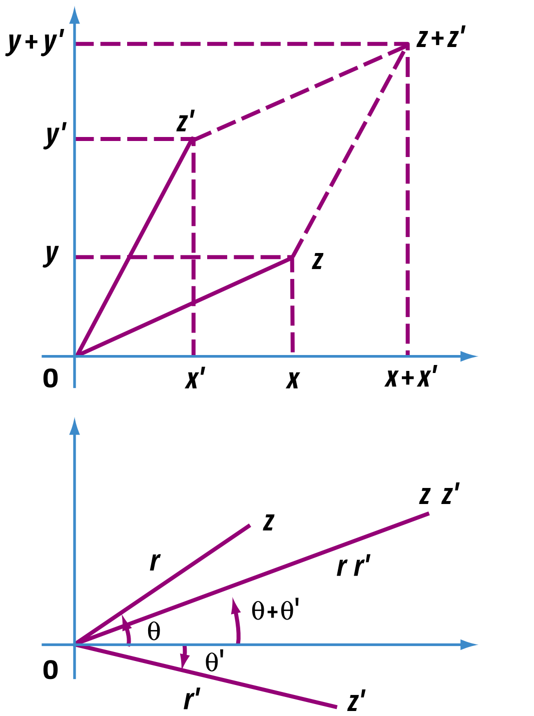
Dans d'autres contextes comme l'étude des rotations de l'espace, les mathématiciens ont inventé différents ensembles de nombres contenant les nombres complexes. Le plus simple est le corps gauche des quaternions, où gauche signifie que le produit n'y est pas commutatif. Ce corps a l'avantage de ramener les calculs sur les rotations de l'espace à des calculs sur des nombres. Il est particulièrement utilisé en informatique, pour commander des robots ou des satellites.

Quel est le lien entre les nombres complexes et la géométrie ?

Les complexes peuvent être vus

comme les points du plan. Plus précisément, si Oxy est un repère orthonormal (droites Ox et Oy perpendiculaires et unités égales), à un nombre complexe z, on associe le point dont les coordonnées sont ses parties réelles et imaginaires. Ce point est dit l'affixe de z. On peut le noter z également car les deux notions se confondent. On lui associe ses coordonnées polaires r et θ, c'est-à-dire la longueur Oz et l'angle orienté (Ox, Oz) compté en radians **[fig. 1]** ; r est le module de z, θ est appelé son argument. Nous en déduisons la formule : $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$. Cette écriture est appelée la forme trigonométrique du nombre complexe z. On la note parfois $[r, \theta]$.
Sur ces points, on peut définir deux opérations. L'addition correspond à celles des parties réelles et imaginaires ; elle s'interprète donc en termes de somme de vecteurs. Pour la multiplication, on multiplie les modules et on additionne les arguments **[fig. 2]**.
Ces résultats de géométrie sont féconds en algèbre. En particulier, on en déduit la formule d'Abraham de Moivre : $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ et les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, c'est-à-dire les nombres dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est égale à 1 : leurs affixes forment un polygone régulier à n côtés **[fig. 3]**. En mathématiques, le nombre j est l'une des racines troisièmes de l'unité ($\sqrt[3]{1}$), le nombre de module 1 et d'argument 120°. Le nombre i est l'une des racines quatrièmes de l'unité, le nombre de module 1 et d'argument 90°. De plus, on en déduit que tout nombre complexe admet deux racines carrées, confondues s'il est nul. Si sa forme trigonométrique est $[r, \theta]$, les racines sont $\left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2}\right]$ et son opposé.
Au XVIe siècle, alors que les mathématiciens avaient l'habitude de s'envoyer des défis, ce lien entre géométrie et algèbre permit au Français François Viète de résoudre une équation du 45e degré proposée par le Belge Adriaan van Roomen. Il estima simplement qu'elle devait correspondre à la division d'un angle en 45 parts égales, ce qui était bien le cas.
Inversement, l'usage des complexes permet de résoudre des problèmes de géométrie plane car toutes les propriétés géométriques ont une traduction en termes de nombres complexes. Les rotations comme les similitudes (les produits d'une rotation et d'une homothétie) correspondent à une multiplication, ce qui simplifie les calculs.

Fig.2 Addition et produit



POUR ADDITIONNER DEUX NOMBRES COMPLEXES, on additionne leurs parties réelles et imaginaires, ce qui correspond à la règle du parallélogramme. Dans le produit de deux nombres complexes, les arguments s'additionnent, tandis que les modules se multiplient.

Et le lien entre les nombres complexes et la trigonométrie ?

Pour le comprendre, il faut faire un détour par les polynômes. Puisque les quatre opérations sont définies dans le champ des complexes, ils gardent un sens si la variable est complexe. Euler a généralisé cette remarque aux sommes infinies de monômes, que l'on appelle séries entières. Si une telle somme infinie a un sens pour tout nombre réel, elle en a également un pour tout nombre complexe !
En analyse réelle, on démontre que la fonction exponentielle est la somme des monômes $x^n/n!$ où $n!$ est la factorielle de n c'est-à-dire le produit des nombres de 1 à n, soit $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ + etc. pour tout nombre réel x. Cette somme garde donc un sens si x est complexe. De plus, on démontre que son équation fonctionnelle : $e^{x+y} = e^x \times e^y$ reste vraie.
En substituant ix à x dans la somme infinie ci-dessus, Euler a remarqué qu'on y retrouvait les développements des fonctions sinus et cosinus, il a ainsi obtenu une formule qui – parmi bien d'autres ! – porte aujourd'hui son nom : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
La forme trigonométrique des nombres complexes s'écrit donc : $z = r\,e^{i\theta}$. En substituant π à x, on obtient la formule : $e^{i\pi} = -1$ que l'on écrit plus souvent : $e^{i\pi} + 1 = 0$.
L'équation fonctionnelle de l'exponentielle : $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$ se traduit en termes de sinus et cosinus :
$$\cos(a+b) + i \sin(a+b)$$
$$= [\cos a + i \sin a] \times [\cos b + i \sin b].$$
On en déduit les formules d'addition de ces deux fonctions, en égalant parties réelles et parties imaginaires :
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
Par ailleurs, en substituant $(-x)$ à x dans la formule donnant e^{ix}, nous obtenons un système de deux équations dont les deux inconnues sont $\cos x$ et $\sin x$. Cela permet d'en déduire deux formules supplémentaires dues à Euler : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.
Elles permettent de linéariser les polynômes trigonométriques, c'est-à-dire d'écrire toutes combinaisons linéaires de produit de puissances de $\cos x$ et $\sin x$ en celles de termes de la forme $\cos nx$ et $\sin nx$.

Pourquoi dit-on que la formule d'Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$ est la plus belle des mathématiques ?

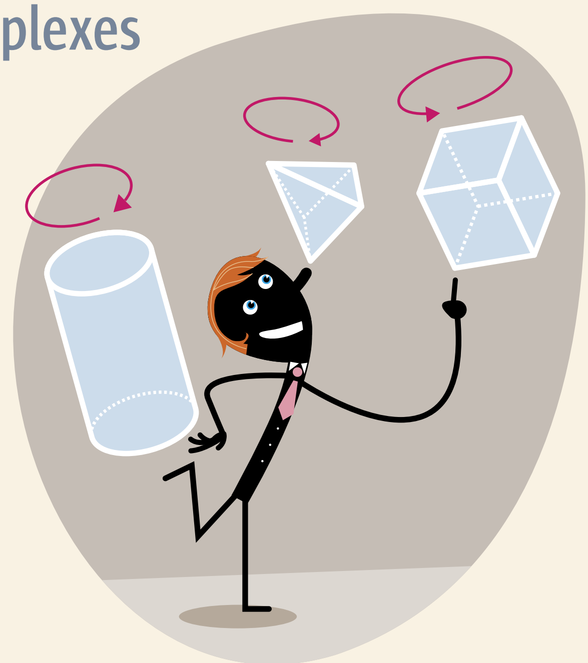
La beauté est affaire de goût, mais cette formule est souvent reconnue ⇨

Les nombres complexes

➩ **comme la plus belle car elle réunit cinq constantes fondamentales :** 0 et 1, les neutres de l'addition et de la multiplication, *i*, la base des complexes, *e* et π, les principales constantes transcendantes (c'est-à-dire non algébriques). De plus, ce dernier nombre introduit le cercle. Si l'on suit Paul Erdös quand il disait : *« Pourquoi les nombres sont beaux ? Et pourquoi la neuvième symphonie de Beethoven est belle ? Si vous ne voyez pas pourquoi, personne ne peut vous le dire »,* ces considérations sont cependant futiles. La beauté ne se définit pas, elle se sent.

Selon la légende, Euler aurait vu dans sa formule une preuve de l'existence de Dieu. On rapporte cette apostrophe à Diderot, athée prosélyte, « $e^{i\pi} + 1 = 0$ donc Dieu existe, répondez monsieur ! ». Si elle est authentique, elle permet seulement d'affirmer qu'Euler avait de l'humour et savait que seul un véritable mathématicien aurait su répondre !

Euler a produit un certain nombre d'autres formules surprenantes utilisant des puissances complexes. En voici une particulièrement curieuse : $i^i = e^{-\pi/2}$, l'imaginaire porté à sa puissance est un nombre réel !

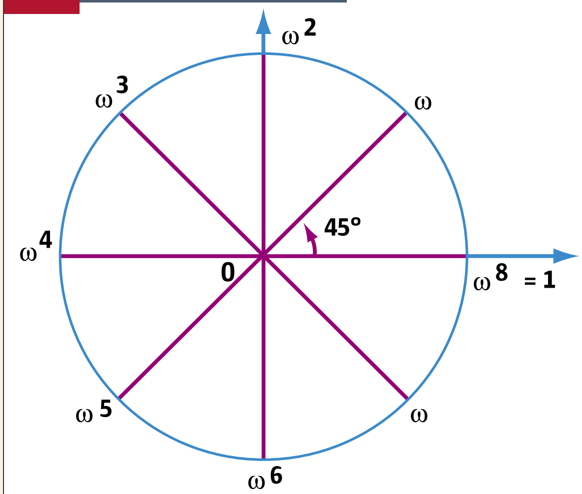


Les nombres complexes ne servent-ils qu'aux mathématiciens ?

Non, en dehors de ces propriétés mathématiques, les complexes se rencontrent dans tous les phénomènes ondulatoires, en particulier en électricité depuis leur introduction par Charles Steinmetz au début du XX[e] siècle. *A priori* les fonctions utilisées en physique sont réelles, ici du type : $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ où $x(t)$ est la valeur du signal considéré à l'instant *t*, A est l'amplitude du courant, ω sa pulsation et ϕ son déphasage.

L'intervention des complexes est un artifice de calcul. Elle consiste à considérer la fonction complexe : $X(t) = A\, e^{i(\omega t + \phi)}$, dont $x(t)$ est la partie réelle. Cette nouvelle fonction se décompose multiplicativement en : $X(t) = A\, e^{i\phi} \times e^{i\omega t}$, la pulsation ω comme la phase ϕ sont isolées. La fonction s'écrit donc : $X(t) = \underline{A} \times e^{i\omega t}$ où le nombre $\underline{A}$ ($\underline{A} = A\, e^{i\phi}$) est appelé l'amplitude complexe. La dérivation est ainsi remplacée par une multiplication (par $i\omega$) et l'intégration par une division. Les équations différentielles deviennent des équations algébriques ! Par exemple : $X'' + X = 0$ devient : $-\omega^2 + 1 = 0$, très facile à résoudre. Nous obtenons les solutions : $x(t) = A\cos(t + \phi)$. De même, pour additionner deux fonctions de même pulsation, il suffit d'ajouter les amplitudes complexes.

Fig.3 Racines de l'unité



LA PUISSANCE NIÈME DU COMPLEXE DE MODULE 1 et d'argument θ **est de module 1 et d'argument** $n\theta$**. Elle est égale à 1 si cet angle est un multiple de 360°. On en déduit que les affixes des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à** n **côtés. La figure illustre le cas** $n = 8$**.**

Quel intérêt d'étudier les fonctions complexes ?

Au départ, les nombres complexes répondent à un problème algébrique : résoudre des équations. Pourtant, leurs propriétés analytiques sont encore plus étonnantes. Une fonction dérivable y est indéfiniment dérivable ! Elle peut même être développée en série entière autour de tout point (comme nous l'avons vu avec la fonction exponentielle).

De façon générale, une fonction réelle qui admet un développement comme l'exponentielle peut être étendue au plan complexe. Si elle est le quotient de deux fonctions de ce type, elle peut l'être au plan duquel on retire les points correspondant aux zéros du dénominateur, appelés pôles de la fonction.

Prenons l'exemple des fractions rationnelles comme $\frac{1}{x^4+1}$ définies sur le plan complexe privé des points ω, ω^3, ω^5 et ω^7 où : $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Au voisinage d'un pôle, sous certaines conditions, une telle fonction peut s'écrire comme somme de termes de la forme $A(x - a)^n$ où *n* est un entier relatif. Le coefficient A correspondant à $n = -1$ est appelé le résidu de la fonction au pôle *a*. Si le pôle est simple (en tant que zéro du dénominateur), le résidu peut se calculer comme limite au pôle a du produit : $(x - a)\, f(x)$. Ainsi le résidu de $\frac{1}{x^4+1}$ en ω est $-\frac{\omega}{4}$.

Les résidus permettent de calculer certaines intégrales réelles. De façon surprenante, ils permettent aussi d'établir un lien entre analyse complexe et théorie des nombres : avec eux, on peut démontrer le théorème des nombres premiers suivant lequel il existe environ $\frac{n}{\ln n}$ nombres premiers inférieurs à *n*. Ils permettent aussi de comprendre le lien entre les zéros de la fonction zêta de Riemann ($\zeta(s)$ est l'extension au plan complexe de la somme des termes $\frac{1}{n^s}$ où $n \geq 1$) et la répartition des nombres premiers, qui fait l'objet de la célèbre « hypothèse de Riemann », toujours non démontrée à ce jour. ▮▮