## BAC TO BASICS

**« C'est tellement simple qu'un enfant de 5 ans le comprendrait. Qu'on aille me chercher un enfant de 5 ans ! » Groucho Marx**


**Une inconnue, des puissances et des additions : tels sont les ingrédients nécessaires pour construire les polynômes. Outil pour les physiciens, équations pour les lycéens, ils restent un objet de recherche pour les mathématiciens.**

# Les polynômes


**Hervé Lehning,**
**professeur de mathématiques spéciales au lycée Janson-de-Sailly.**
herve.lehning@prepas.org


## Qu'est-ce qu'un polynôme ?

**Une somme de monômes : *« poly »* signifie « beaucoup » en grec, et *« mono »*, « unique ».** Un monôme, c'est une inconnue, notée X, élevée à une certaine puissance et multipliée par un certain coefficient.

Et d'un point de vue étymologique, que sont ces « nômes » ? Selon certains linguistes comme Albert Dauzat, « nôme » viendrait de *« onoma »*, qui signifie « nom ». Cette interprétation colle à la réalité mathématique : un monôme se nomme par son degré (la puissance) et un monôme a un seul degré. Le degré peut être nul (comme celui de 2, car $2 = 2X^0$), égal à 1 ($5X$), à 2 ($3X^2$)... Dans un polynôme quelconque, le degré est égal à celui du monôme dont la puissance est la plus élevée.

Il existe une autre étymologie : *« nomos »*, qui signifie « loi ». On peut penser alors à la fonction mathématique, donc à la « loi » de calcul. Ces deux étymologies éclairent la différence subtile entre polynôme et fonction polynomiale. D'un côté, les polynômes sont des « êtres » formels, de l'autre, des lois de calcul. Ainsi, $2 - 3X^2 + 4X^4$ est un objet sur lequel on peut faire un certain nombre d'opérations (addition, multiplication, division, etc.), mais également une fonction : celle qui, à chaque valeur substituable à X (comme 5) associe le nombre $2 - 3X^2 + 4X^4$ (ici $2 - 3 \times 5^2 + 4 \times 5^4 = 2427$).

## D'où vient l'inconnue X ?

**L'usage de la lettre X remonte à René Descartes.** Mais l'idée de donner un nom à l'inconnue d'un problème est plus ancienne encore, puisqu'elle vient du mathématicien grec Diophante (III^e siècle), qui l'appelait *« arithmos »*, le nombre. Plus tard, le mathématicien perse Al-Kwarizmi (IX^e siècle) la nomma *« shay »*, la chose en arabe. Cette pratique parvint en France grâce aux Espagnols, qui transcrivaient ce mot en « xay ». Descartes simplifia en ne gardant que l'initiale, d'où « X ». Son usage s'étendit ensuite, en particulier au monde judiciaire.

En mathématiques, la lettre « X » porte le nom d'inconnue quand il s'agit de résoudre une équation, d'indéterminée s'il est question de polynômes et de variable dans le cadre des fonctions. Un triple statut qui est parfois source de confusions.

## Qu'appelle-t-on les « zéros » d'un polynôme ?

**Un nombre *a* est zéro d'un polynôme P s'il est racine de l'équation P (X) = 0, c'est-à-dire si et seulement si P (*a*) = 0.** Par abus de langage, on parle aussi ⇨

⇨ des racines d'un polynôme. Cela équivaut à dire que P (X) est multiple de (X − *a*). Le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X - a)^m$ divise P (X) est appelé l'ordre de multiplicité de *a*. Ainsi 1 est un zéro d'ordre de multiplicité 2 (ou zéro double) de $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ puisque ce polynôme est le produit de $(X - 1)^2$ par (X − 2).
D'après le théorème de d'Alembert, « un polynôme à coefficients réels ou complexes* de degré N a exactement N zéros réels ou complexes si on les compte avec leurs ordres de multiplicité ». Ainsi, $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ a trois zéros : 1 compté deux fois et 2 compté une seule fois.
C'est le Français Albert Girard (à qui l'on doit notamment l'usage des abréviations sin, cos et tan pour sinus, cosinus et tangente) qui conjectura ce résultat au XVIIe siècle. Le philosophe et mathématicien Jean Le Rond d'Alembert pensa le prouver au XVIIIe siècle, et lui donna son nom (en France). En réalité, sa preuve était fausse ; la première démonstration correcte est l'œuvre de Carl Friedrich Gauss en 1799.
On peut exprimer les zéros d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Ainsi, si x et y sont les deux zéros de : $aX^2 + bX + c$, alors ce trinôme se factorise en : $a(X - x)(X - y)$. En développant, on obtient $aX^2 - a(x + y)X + axy$. Et en identifiant les deux expressions, on en déduit que $x + y = -b/a$ et $xy = c/a$.
On peut faire de même au degré trois. On obtient alors une expression de la somme $(x + y + z)$, de la somme des produits deux à deux $(xy + yz + zx)$ et du produit $(xyz)$ en fonction des coefficients.

**Fig.1 L'algorithme de la division euclidienne**

| | |
|---|---|
| $X^3 \qquad + X + 1$ | $X + 1$ |
| $X^3 + X^2$ | $X^2 - X + 2$ |
| $-X^2 + X + 1$ | |
| $-X^2 - X$ | |
| $2X + 1$ | |
| $2X + 2$ | |
| $-1$ | |

**LA DIVISION EUCLIDIENNE DES POLYNÔMES se pose comme celle des nombres entiers. $X^3$ divisé par X donne $X^2$, qui est donc le premier monôme du quotient. On le multiplie par le diviseur X + 1, on reporte le résultat sous le dividende avant de le retrancher à celui-ci, etc.**

* Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $a + ib$ où $i^2 = -1$.

Pour le degré quatre, il faut également tenir compte de la somme des produits trois à trois, etc. Dans la pratique, ces expressions ne servent que rarement à calculer les zéros d'un polynôme.

## Quelles opérations peut-on effectuer sur les polynômes ?

**On peut les additionner, les soustraire et les multiplier facilement.** Pour calculer une somme (ou une différence), il suffit d'ajouter (de retrancher) tous les monômes de chaque polynôme. Ainsi, la somme de $X^3 + 3X^2 - 1$ et $X^2 + 2X + 2$ est le polynôme : $X^3 + 4X^2 + 2X + 1$. Pour calculer le produit, c'est plus compliqué. On multiplie d'abord chaque monôme du premier par le second. Ainsi, $X^3$ multiplié par $X^2 + 2X + 2$ donne $X^5 + 2X^4 + 2X^3$. On recommence avec les autres, d'où $3X^4 + 6X^3 + 6X^2$ et $-X^2 - 2X - 2$ et on regroupe le tout. On obtient : $X^5 + 5X^4 + 8X^3 + 5X^2 - 2X - 2$.

Pour la division, on cherche une analogie avec la division avec reste. L'idée est d'adapter la notion de reste en disant qu'un polynôme A est plus petit qu'un polynôme B quand le degré de A est plus petit que celui de B **[fig. 1]**. Dans le cas de $X^3 + X + 1$ divisé par X + 1, on obtient un « quotient » $(X^2 - X + 2)$ et un reste (− 1). On retrouve la relation usuelle : $X^3 + X + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 2) - 1$. De façon générale, si A et B sont deux polynômes, il existe deux polynômes Q et R uniques (appelés quotient et reste) tels que : A = BQ + R, où le degré de R est strictement inférieur à celui de B (si le degré de A est inférieur à celui de B, alors Q = 0 et R = A).
Le fait que les opérations sur les polynômes ressemblent beaucoup à celles que l'on peut faire sur les entiers a conduit les mathématiciens à étudier la relation entre ces deux ensembles d'objets. L'analogie entre polynômes et entiers a en fait un fondement bien précis : l'ensemble des polynômes et celui des entiers ont une structure commune, celle d'anneau euclidien. Il s'agit d'un ensemble muni des quatre opérations : addition, soustraction, multiplication et division (avec reste).
Grâce à cette structure commune avec les entiers, on peut définir les notions de multiple, de diviseur, de PGCD (plus grand commun diviseur, « plus grand » dans le sens de plus grand degré), de PPCM (plus petit commun multiple), de polynômes premiers entre eux (sans diviseurs communs) et également de polynômes irréductibles. Il s'agit de l'analogue des nombres premiers. D'après le théorème de d'Alembert, les polynômes irréductibles sont ceux du premier degré si les coefficients sont réels ou complexes. Si l'on exclut les complexes, les polynômes irréductibles sont ceux du premier degré, plus ceux du second degré de discriminant strictement négatif.

## Que discrimine le discriminant ?

**Le fait qu'un polynôme a des racines multiples : c'est le cas si et seulement si son discriminant Δ est nul.** Au second degré, si on note les racines *x* et *y*, $\Delta = (x - y)^2$ (à un coefficient multiplicatif près). Au troisième, si les racines sont *x*, *y* et *z*, $\Delta = (x - y)^2 (y - z)^2 (z - x)^2$, etc.

Dans chaque cas, et quel que soit le degré du polynôme, $\Delta$ se calcule en fonction des coefficients du polynôme. Par exemple, dans le cas du second degré, $\Delta = b^2 - 4ac$. Au troisième degré, les calculs sont plus compliqués.
L'ensemble des points de coordonnées $(a, b, c)$ tels que $\Delta = 0$ est une surface, donc un objet de volume nul. Imaginons que nous voulions tirer un polynôme du second degré au hasard. Cela revient à placer un point (celui de coordonnées $(a, b, c)$) dans l'espace de manière aléatoire. Il est très peu probable qu'il soit situé sur la surface précédente. Il en est de même à tous les degrés. Ainsi, si un polynôme de degré N est pris au hasard, il est presque certain qu'il ait N racines distinctes.

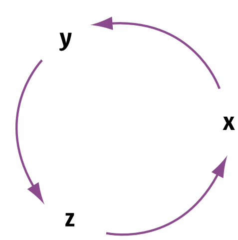
## Existe-t-il des formules pour trouver tous les zéros de tous les polynômes ?

**Jusqu'au degré quatre seulement – du moins si l'on s'en tient à la règle des algébristes italiens de la Renaissance,** qui est de trouver les zéros des polynômes en fonction de leurs coefficients, des quatre opérations et de radicaux (carrés, cubiques, etc.).
On ne dispose de formules simples que pour le premier et le second degré : $a X^2 + b X + c$. Si $\delta$ est une racine carrée de son discriminant $\Delta$ (c'est-à-dire que $\delta^2 = \Delta$), les deux zéros sont $(-b \pm \delta)/(2a)$. Si l'on travaille avec des nombres complexes, cette formule n'a aucune exception, ni cas particulier. Par exemple, le discriminant du polynôme $X^2 + 2X + 2$ est $\Delta = -4 = (2i)^2$ donc ses zéros sont $-1 \pm i$.
Au XVI[e] siècle, Jérôme Cardan et Ludovic Ferrari ont trouvé des formules générales pour les équations de degrés 3 et 4. Personne ne réussit jamais à aller plus loin. Pour la bonne raison que ces formules n'existent pas.
Comment l'a-t-on découvert ? Au début du XIX[e] siècle, Évariste Galois montra le lien entre leur existence et les groupes* de permutations. Considérons le sous-groupe H des permutations circulaires de trois lettres x, y et z **[fig. 2]**. Il permet de décomposer le groupe des permutations G d'une façon très particulière que voici. Soit T une permutation n'appartenant pas à H (par exemple, celle qui échange *y* et *z*). La partie TH obtenue en composant chaque élément de H par T est le complémentaire H' de H dans G. De même, TH' = H. La raison de l'existence d'une formule pour les zéros d'un polynôme de degré 3 tient dans cette décomposition : G = H + TH. Le groupe de permutations de 4 éléments est également décomposable sous cette forme, ce qui n'est pas le cas pour plus d'éléments. Il n'existe donc pas de formule pour trouver les zéros des équations de degré 5, ou plus.

* Un **groupe** est un ensemble muni d'une loi de composition, associative ($(xy)z = x(yz)$), possédant un élément neutre e ($xe = ex = x$), tout élément possédant un inverse (pour tout $x$, il existe un élément $y$ tel que : $xy = yx = e$).

**Fig.2 Permutations de trois lettres**

**IL EXISTE SIX PERMUTATIONS des trois lettres *x, y* et *z* : *x y z, x z y, y x z, y z x, z x y, z y x.* Pour les composer, on applique l'une puis l'autre. On démontre qu'on obtient ainsi un groupe G. Les trois permutations *x y z, y z x* et *z x y* sont dites circulaires, car elles correspondent aux rotations d'angle 0, 120 et 240 degrés autour du centre du cercle. Elles forment un sous-groupe H de G car le produit de deux rotations est une rotation, son inverse aussi. Les trois autres permutations correspondent aux échanges entre deux lettres.**




## Comment les calculer alors ?

**Par des méthodes approchées.** Pour les zéros réels d'un polynôme réel, le plus simple est de « balayer » la droite des abscisses pour détecter des changements de signe. Par exemple, $X^3 + 3X^2 - 1$ est négatif en – 3, positif en – 2 et – 1, négatif en 0 et positif en 1. Cela donne ses trois zéros, à une unité près (un entre – 2 et – 1, un entre 0 et 1 et un autre entre 1 et 2). On améliore la précision en coupant ces intervalles en deux et en déterminant le signe du polynôme en chaque milieu. En répétant cette opération, on trouve que le polynôme change de signe entre – 2,88 et – 2,87 ; il a donc un zéro égal à – 2,88 à 0,01 près.
Cette méthode de dichotomie est la méthode itérative la plus élémentaire. Isaac Newton en a trouvé une plus perfectionnée. Elle consiste à remplacer le polynôme par la tangente à sa courbe représentative en un point. Par exemple, pour trouver une approximation du zéro de $X^3 + 3X^2 - 1$ compris entre 1 et 2, on part du point A d'abscisse 2 du graphe du polynôme et on trace la tangente en ce point. Elle coupe l'axe horizontal en un point, ce qui fournit une approximation de la racine considérée (on trouve 1,67). Pour améliorer la précision, il suffit de reprendre le même raisonnement en partant du point B d'abscisse 1,67. On trouve 1,54.
Enfin, au XX[e] siècle, le mathématicien britannique Leonard Bairstow a imaginé une méthode pour déterminer les zéros complexes des polynômes. Elle consiste à chercher des diviseurs de degré 2 puis à trouver les zéros de ces nouveaux polynômes.

## Comment peut-on rapidement calculer les valeurs d'un polynôme ?

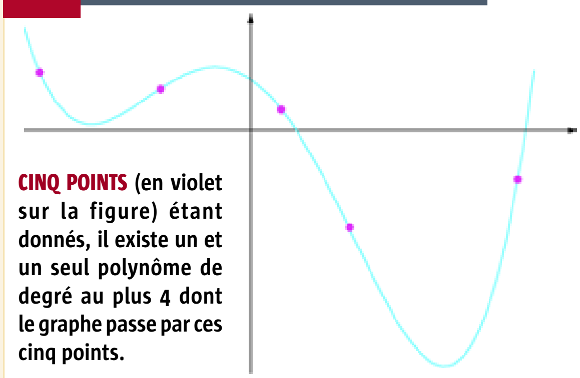
**La meilleure méthode est la « méthode de Horner ».** Au XIX[e] siècle, le mathématicien britannique William Horner eut l'idée d'écrire le polynôme : $3X^4 + 5X^3 + 4X^2 + 6X + 2$ sous la forme : $2 + X(6 + X(4 + X(5 + X(3))))$. Les ⇨

⇨ calculs s'effectuent alors en partant de l'intérieur des parenthèses. On obtient dans l'ordre : A = 5 + 3 X, B = 4 + X A, C = 6 + X B, D = 2 + X C. On effectue ainsi 4 multiplications et 4 additions pour trouver une valeur du polynôme. Le calcul direct, lui, requiert également 4 additions, mais le nombre de multiplications est égal à 4 + 3 + 2 + 1 = 10. Le gain est donc important.
Cette démarche s'applique au calcul numérique. On obtient en particulier des méthodes qualifiées de « goutte à goutte » car les décimales tombent l'une après l'autre, comme les gouttes d'un robinet mal fermé. On calcule ainsi les décimales des nombres *e* ou π à partir de leur développement en somme infinie.

## Comment les physiciens se servent-ils des polynômes ?

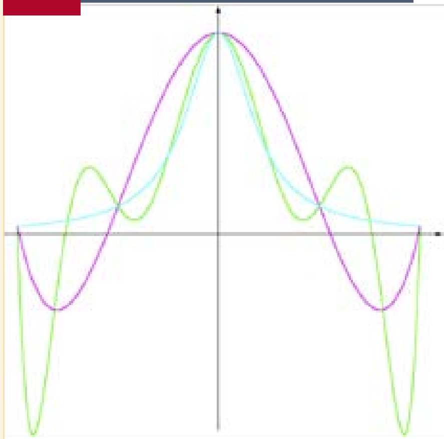
**Pour des problèmes de résolution d'équations aux dérivées partielles, ils font couramment appel aux polynômes, mais pris sous un angle différent.** L'idée est de voir les polynômes comme des vecteurs d'un espace abstrait. On parle d'espace vectoriel pour caractériser l'ensemble de ces vecteurs (car on peut faire des additions et des multiplications par un scalaire – un nombre). Quelle est la dimension de cet espace ? On entend ici par dimension le nombre de paramètres nécessaires pour définir un vecteur (par exemple, dans le plan, un vecteur est défini par deux coordonnées donc le plan est de dimension deux). Si on ne limite pas le degré des polynômes à coefficients réels, l'ensemble qu'ils forment est un espace vectoriel de dimension infinie. Si on se limite au degré N, un polynôme est défini par ses monômes de degré 0, 1, 2, ..., N et donc par N + 1 paramètres. Ainsi, cet espace est de dimension N + 1.
Comme on travaille dans un espace, on peut parler de polynômes orthogonaux : cette notion est d'une grande importance en physique. La résolution de l'équation de Laplace, que l'on rencontre aussi bien en mécanique qu'en électricité, repose ainsi sur des polynômes orthogonaux, les « polynômes de Legendre ». On peut ainsi multiplier les exemples : les polynômes de Tchebychev, d'Hermite, de Laguerre et de Jacobi servent tous à résoudre divers problèmes régis par des équations différentielles.


**Fig.3 Problème de l'interpolation**



**CINQ POINTS** (en violet sur la figure) étant donnés, il existe un et un seul polynôme de degré au plus 4 dont le graphe passe par ces cinq points.

**Fig.4 Phénomène de Runge**



**LE GRAPHE BLEU correspond à la fonction qui à X associe $1/(1 + 25X^2)$ sur le segment [− 1, 1]. Avec 5 points d'interpolation uniformément répartis, nous obtenons la courbe en violet, avec 9, la courbe en vert : plus il y a de points, plus l'approximation est mauvaise. Les points de Tchebychev sont plus nombreux aux bords du segment qu'en son milieu, ce qui assure une meilleure qualité de l'approximation.**

## Peut-on représenter toutes les fonctions avec des polynômes ?

**Oui, si l'on fait appel à la notion d'approximation.** Pour ce faire, la première idée est l'interpolation. Le problème est le suivant : on connaît une fonction par ses valeurs en un certain nombre de points, et on cherche un polynôme prenant les mêmes valeurs aux mêmes points. Ce problème a une interprétation géométrique en termes de courbes passant par les points donnés [fig. 3]. Si N est le nombre de points, il existe un et un seul polynôme de degré au plus N − 1 qui permet de résoudre le problème.
L'approximation des fonctions est un problème légèrement différent. Un segment K et une précision ε étant donnés, il s'agit de trouver un polynôme ne s'éloignant pas (sur K) de plus de ε de la fonction donnée. On peut par exemple choisir N points de son graphe, d'abscisses uniformément réparties sur K et les interpoler. Malheureusement, même avec un grand nombre de points, le polynôme d'interpolation peut ne pas convenir. Ce phénomène est appelé phénomène de Runge, du nom du mathématicien allemand Carl Runge [fig. 4].
Une façon d'y remédier est d'utiliser comme abscisses d'interpolations les zéros des « polynômes de Tchebychev » qui renforcent l'influence des extrémités de l'intervalle, là où se situe le phénomène de Runge. Ainsi, si K = [−1, 1], il s'agit des cosinus des nombres $(2k + 1)\,\pi/(2n)$ où $k$ varie de 0 à $n - 1$. Il existe aussi d'autres méthodes d'approximation qui font également appel à des polynômes. Chacune a son domaine d'application privilégié. Par exemple, les développements en série entière sont utiles pour résoudre certaines équations différentielles linéaires. ▮▮