Étude de la suite récurrente typique

par Hervé Lehning

professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Janson de Sailly

Dans cet article, nous nous intéresserons aux suites récurrentes définies par une relation du type $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où f est une fonction continue sur un espace X à valeurs dans lui-même et a un point de X. Pour l'essentiel, on peut se limiter au cas où cet espace X est un intervalle réel mais nos résultats dépassent ce cadre. L'expression «typique» n'est pas sans ambiguïté. En effet, elle peut être interprétée dans le sens de «cas représentatif» de tous les autres. Elle peut également signifier «cas dont on attend l'occurence». Un mathématicien lui donnera alors presque sûrement un sens probabiliste. Dans cet article, nous jouerons d'abord sur les deux sens. Nous le définirons ensuite afin de présenter des résultats précis.

Partie I
Cas typique des concours

1. Un théorème permettant de le traiter

Si nous nous fions aux annales des concours, la suite récurrente typique n'est pas stationnaire et converge vers une limite. À la rigueur, elle a deux valeurs d'adhérence sans être périodique. Il est rare qu'elle en ait davantage. D'autre part, les fonctions impliquées sont au moins continûment dérivables. Ainsi, nous voyons au paragraphe 2 qu'une itérée de la fonction f vérifie toujours les hypothèses du théorème suivant pour un certain intervalle X.

Théorème 1

Soit X un intervalle réel non vide, ℓ un point de X et f une fonction continue sur X à valeurs dans X telle que $|f(x) - \ell| \leqslant |x - l|$ pour tout $x \in X$ avec égalité si et seulement si $x = \ell$. Sous ces conditions, pour tout $a \in X$, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie et converge vers ℓ.

Preuve. Nous laisserons au lecteur le soin de prouver que nous pouvons toujours nous ramener au cas où $\ell = 0$ et X est l'un des segments $[-\alpha, \alpha]$, $[0, \alpha]$ ou $[-\alpha, 0]$ où $\alpha > 0$.

La suite est bien définie et à valeurs dans X car $f(X) \subset X$. L'inégalité montre alors que la suite $(|u_n|)_{n \geqslant 0}$ est décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge donc. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée. Il existe donc une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ convergente vers un point x. La partie X étant fermée, ce point lui appartient. Comme la fonction f est continue en x, $(u_{\varphi(n)+1})_{n \geqslant 0}$ converge vers $f(x)$. Les suites $(|u_{\varphi(n)}|)_{n \geqslant 0}$ et $(|u_{\varphi(n)+1}|)_{n \geqslant 0}$ étant extraites de la même suite convergente ont donc la même limite. On en déduit que $|f(x)| = |x|$ et il s'ensuit que $x = 0$. La suite bornée $(u_n)_{n \geqslant 0}$ ayant une seule valeur d'adhérence converge donc.

2. Généralisation

Cette preuve reste correcte si X est une partie fermée d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Il suffit de remplacer la valeur absolue par une norme. Le théorème reste donc vrai dans ce cadre. Ainsi, nous obtenons le suivant.

Théorème 2

Soit X une partie fermée non vide d'un espace vetoriel réel de dimension finie, $\| \ \|$ une norme sur cet espace, ℓ un point de X et f une fonction continue sur X à valeurs dans X telle que $\|f(x) - \ell\| \leqslant \|x - \ell\|$ pour tout $x \in X$ avec égalité si et seulement si $x = \ell$. Sous ces conditions, pour tout $a \in X$ la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie et converge vers ℓ

Ce théorème est faux en dimension infinie. Pour le montrer, il suffit de considérer l'espace X des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de carré sommable muni de la norme définie par $\|x\| = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n^2}$. On considère la suite ε définie par $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\varepsilon_n = \exp\left(-\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $n \neq 0$. Puis on définit un endomorphisme f de X en posant $[f(x)]_n = \varepsilon_n x_{n+1}$ pour tout $x \in X$ et tout $n \in Z$. Le lecteur pourra montrer que cet endomorphisme vérifie les hypothèses du théorème 2 pour $\ell = 0$ bien que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ contredise ses conclusions pour $a \neq 0$.

3. Exemples

a. Étudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \,]0, 2\pi[\\ u_{n+1} = u_n + 2 \sin u_n \end{cases}$

Cette suite converge vers π car nous retrouvons la configuration du théorème 1 comme le suggère la figure 1.

La preuve vient directement de la convexité de la fonction impliquée. Le lecteur en déduira s'il le désire un théorème plus général. Il pourra alors recenser les exercices classiques des concours pouvant être traités ainsi.

b. Méthode de Kacmarz

Soit E un espace affine euclidien, k sa dimension et H_1, H_2, ..., H_k des hyperplans se coupant en un point et un seul ℓ. Soit a un point quelconque de E. On le projette sur H_1, on obtient ainsi un autre point que l'on projette sur H_2, on projette ce point sur H_3 et ainsi de suite. Quand on a projeté sur H_k, on recommence avec H_1 puis H_2, H_3, *etc.* Étudier la suite ainsi définie.

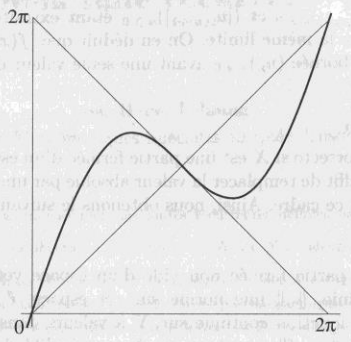

Figure 1

En utilisant le théorème 2, on montre facilement que cette suite converge vers ℓ. On en déduit une méthode itérative de résolution des sytèmes linéaires. Cette méthode est appelée méthode de Kacmarz (voir [8]).

Partie II
Origine du côté typique du cas des concours

Le fait que nous soyons toujours ramené au théorème 1 s'explique grâce aux deux théorèmes suivants.

1. Suite convergente associée à une fonction continument dérivable

Théorème 3

Soit f une fonction continûment dérivable sur un intervalle réel non vide I et ℓ un point de I. On suppose qu'il existe un point a de I tel que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers ℓ sans être stationnaire. Alors il existe un intervalle X d'intérieur non vide contenant ℓ tel que le triplet $(X, \ell, f \circ f)$ vérifie les hypothèses du théorème 1.

Preuve. De même que dans le cas du théorème 1, nous laissons au lecteur le soin de prouver que nous pouvons toujours nous ramener au cas où $\ell = 0$ et X est l'un des segments $[-\alpha, \alpha]$, $[0, \alpha]$ ou $[-\alpha, 0]$ où $\alpha > 0$. Nous traitons le premier cas, le lecteur adaptera facilement nos raisonnements dans les autres cas.

Étude de la suite récurrente typique

Nous posons $g = f \circ f$. Il est facile de montrer que $g(0) = 0$ puis que $g'(0) \in [0, 1]$ en considérant la suite $\left(\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n}}\right)_{n \geqslant i}$ et en utilisant le théorème de d'Alembert. Le cas où $g'(0) \in [0, 1[$ se règle alors facilement en utilisant le théorème des accroissements finis. Nous supposons donc $g'(0) = 1$. La fonction g' étant continue en 0, il existe un segment $J = [-\varepsilon, \varepsilon]$ tel que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in J$. La fonction g est donc strictement croissante sur l'intervalle J. D'autre part, comme la suite $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$ converge vers 0, il existe un entier N tel que $u_{2n} \in J$ si $n \geqslant N$. Donc, si $g(u_{2N}) < u_{2N}$ alors la suite $(u_{2n})_{n \geqslant N}$ est décroissante, sinon elle est croissante. Plaçons nous dans le premier cas, le second lui étant similaire. Comme la suite $(u_{2n})_{n \geqslant N}$ est décroissante et converge vers 0, nous pouvons supposer que $J = [0, \varepsilon]$. L'ensemble Z des $x \in [0, u_{2N}]$ tel que $g(x) = x$ admet une borne supérieure β. Comme Z est fermé puisque g est continue, $\beta \in Z$. Le théorème 1 est alors applicable à la fonction g, l'intervalle $[\beta, u_{2N}]$ et le point β (voir la figure 2). La suite $(u_{2n})_{n \geqslant N}$ converge donc vers β ce qui implique $\beta = 0$. D'où le résultat.

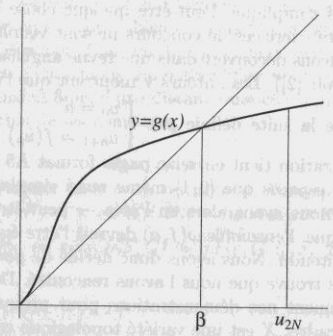

Figure 2

2. Suite ayant un nombre fini de valeurs d'adhérence

Théorème 4

Soit f une fonction continûment dérivable sur un intervalle réel non vide I et $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ des points de I. On suppose qu'il existe un point a de I tel que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ ait $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ comme valeurs d'adhérence sans être périodique. Alors il existe un intervalle X d'intérieur non vide contenant ℓ_1 tel que le triplet (X, ℓ_1, f^{2k}) vérifie les hypothèses du théorème 1.

Preuve. Soit $\omega = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k\}$. Le lecteur montrera facilement que $f(\omega) = \omega$. La restriction φ de la fonction f à ω est une permutation, elle se décompose en cycles disjoints. On montre alors qu'une décomposition non triviale est impossible en utilisant l'uniforme continuité de f. Ainsi, ω est un cycle et $f^k(\ell_1) = \ell_1$. Le reste suit en utilisant le théorème 3.

3. Cas des dimensions supérieures

Ces résultats ne se généralisent pas (en remplaçant «intervalle» par «boule» par exemple) à des dimensions supérieures à cause de phénomènes de rotation. Le lecteur pourra par exemple étudier les suites associées à la fonction définie sur le plan complexe à valeurs dans lui-même par $f(x) = \mathrm{j}(1 + \mathrm{Re}\, x)x$.

Partie III
Cas vraiment typique

En fait quand on lit des ouvrages de vulgarisation scientifique, le vrai cas typique semble autrement plus compliqué. Peut-être quelque chose du genre de la suite logistique (voir [1]). Les exercices de concours ne sont visiblement pas choisis au hasard. De fait, nous avons découvert dans une revue anglaise la description de ce cas pour $X = [0, 1]$ (voir [2]). Les auteurs y montrent que l'ensemble des valeurs d'adhérence $\omega(f, a)$ de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est un ensemble de Cantor. Leur démonstration tient en seize pages format A5 et ne peut peut être généralisée à d'autres espaces que $[0, 1]$ même aussi simples que le cercle ou la sphère. Peu importe, nous avons alors eu l'idée — peut-être incongrue — suivante. Si (f, a) est typique, l'ensemble $\omega(f, a)$ devrait l'être également. En tant que compact de X bien entendu. Nous avons donc décidé de partir à la recherche du compact typique. Il se trouve que nous l'avons rencontré. De plus, il nous a suffi alors d'adapter légèrement nos démonstrations pour prouver les deux résultats suivants. Dans notre cadre, X est une variété topologique compacte à bord. Cela inclut par exemple les boules fermées et les sphères des espaces réels de dimension finie.

Théorème 5

Si f est la fonction continue typique de X dans X alors, si a est le point typique de X, $\omega(f, a)$ est un compact sans points isolés de dimension de Hausdorff nulle.

Cette notion de dimension ne sera pas discutée dans cet article. Voir le livre d'Hurewicz (voir [3]) pour cela.

Théorème 6

Si f est la fonction continue typique de X dans X alors la fonction $a \longrightarrow \omega(f, a)$ est continue au point typique de X.

Ces deux résultats impliquent que la suite typique n'est pas aussi monstrueuse qu'il peut sembler. Si l'on s'en tient à la définition qu'en donne Mandelbrot dans l'un de ses livres (voir [4]), l'ensemble $\omega(f, a)$ n'est même pas un fractal. En effet, ses dimensions topologiques et de Hausdorff coïncident. De même, elle n'est pas chaotique car la fonction $a \longrightarrow \omega(f, a)$ est continue ce qui exclut la sensibilité catastrophique par rapport à la condition initiale qui est caractéristique du chaos.

Partie IV
Compact typique

Dans ce paragraphe, nous nous proposons donc d'étudier le cas du compact typique ou plus précisément des propriétés typiques des compacts. Le passage à la suite typique est alors facile. Les démonstrations se calquent sur celles qui suivent comme nous le voyons au paragraphe 5.

1. Distance de Hausdorff entre les compacts

Un premier résultat que nous pouvons trouver dans l'ouvrage de Berger (voir [5]) nous montre qu'il ne ressemble pas aux vagues amibes que le professeur typique a l'habitude de dessiner sur son tableau. En fait, il s'agirait plutôt de quelque chose d'impossible à dessiner. Pour en dire plus, nous avons besoin de préciser le cadre dans lequel nous nous situons. Pour simplifier, nous considérons E un espace vectoriel réel de dimension finie, d une distance associée à une norme sur E et nous notons $K(E)$ l'ensemble de ses compacts.

Définition

Soit F un compact et $\varepsilon > 0$, on note F_ε l'ensemble des points x tels que $\mathrm{d}(x, F) < \varepsilon$ où $\mathrm{d}(x, F) = \inf\limits_{y \in F} \mathrm{d}(x, y)$. Si F et G sont deux compacts, on note $\delta(F, G) = \inf\{\varepsilon, G \subset F_\varepsilon, F \subset G_\varepsilon\}$ (voir figure 3).

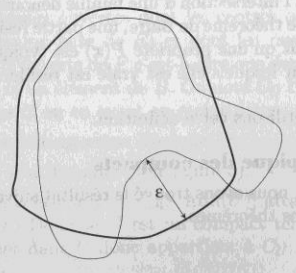

Figure 3

Théorème

δ est une distance sur $K(E)$ pour laquelle $K(E)$ est complet.

Le lecteur intéressé trouvera une démonstration de ce résultat dans l'ouvrage de Berger. Il y trouvera aussi que l'ensemble des parties finies est dense dans $K(E)$. Ceci nous ramènerait pas très loin des cas typiques des concours.

2. Sens du mot typique

Pour aller plus loin il nous faut préciser ce qu'est une propriété typique. En probabilité, nous aurions envie de dire qu'une propriété est typique si la probabilité qu'elle ait lieu est égale à 1. Malheureusement, il semble difficile de mettre une mesure de probabilité sur un espace tel que $K(E)$. Une première idée plus topologique serait alors de dire qu'une propriété est typique si elle est vraie sur une partie dense. Ainsi, si on suit le résultat cité plus haut, le compact typique serait une partie finie. L'ennui est qu'avec une telle définition, il serait typique pour un nombre réel d'être rationnel. Il serait également typique de ne pas l'être. Bien sûr, rien n'empêche de définir le mot « typique » ainsi mais son sens mathématique n'aurait plus rien à voir avec ceux que le bon sens lui donne. C'est malgré tout un peu gênant tout de même. La seconde idée qui peut venir à l'esprit est de dire qu'une propriété est typique si elle est vraie sur un ouvert dense. Ainsi, non seulement tout élément serait infiniment proche d'un élément typique (densité) mais de plus tout élément assez proche d'un élément typique le serait également (ouverture). En outre, l'inconvénient précédent disparaît puisque l'intersection de deux ouverts denses est un ouvert dense. En fait, cela ne suffit pas et, comme en probabilité, nous avons intérêt qu'un conjonction dénombrable de propriétés typiques soit également typique. Nous arrivons ainsi à la définition suivante qui se place dans le cadre des espaces métriques complets.

Définition

Soit E un espace métrique complet. On appelle résiduelle toute partie contenant l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses (d'après le théorème de Baire, une partie résiduelle est dense (voir [6])). On dit qu'une propriété $P(x)$ est typique si l'ensemble des points x pour lesquels elle est vraie est résiduel.

Dans ce qui suit, nous utilisons cette définition.

3. Une propriété typique des compacts

Muni de cette définition, nous avons trouvé le résultat suivant avant de l'améliorer un peu pour arriver à nos théorèmes.

Théorème 7

Le compact typique d'un espace de dimension finie est d'intérieur vide, sans points isolés et de mesure nulle.

Remarque. On peut remplacer l'expression « mesure nulle » par « de dimension de Hausdorff nulle », la propriété reste vraie. La démonstration n'est pas plus difficile, elle exige seulement de connaître la notion de dimension. Le lecteur intéressé pourra facilement adapter la démonstration qui suit (voir [3]).

Preuve. Soit n un entier strictement positif, on note M_n l'ensemble des éléments de $K(E)$ pouvant être recouverts par un nombre fini de boules ouvertes dont la somme des rayons est inférieure à $\frac{1}{n}$. Il est facile de montrer que M_n est un ouvert. Soit F un compact et $\varepsilon > 0$, de l'ensemble des boules de rayon ε centrées en un point de F, on extrait un sous recouvrement fini (voir figure 4).

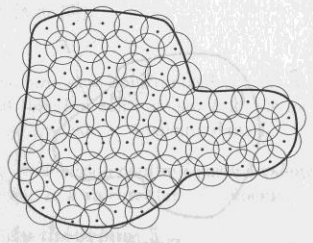

Figure 4

Nous appelons G l'ensemble des centres de ces boules. G est un élément de M_n et $\delta(F,G) < \varepsilon$. M_n est donc dense. Nous en déduisons que $M = \bigcap_n M_n$ est une partie résiduelle de $K(E)$. D'autre part, il est clair que les éléments de M sont de mesure nulle.

Soit B l'ensemble des boules ouvertes dont les centres ont des coordonnées rationnelles (dans une certaine base de E) et dont les rayons sont également rationnels. B est une base d'ouverts de E c'est-à-dire que dans tout ouvert de E, il y a un élément de B. Soit U un élément de B. On note C_U l'ensemble des compacts n'ayant aucun point dans U ou en ayant au moins deux.

Soit F un compact, nous distinguerons deux cas :

- Si F et $\mathrm{Adh}(U)$ sont disjoints (voir figure 5).

  Alors la fonction continue $x \longrightarrow \mathrm{d}[x, \mathrm{Adh}(U)]$ atteint un minimum $\alpha > 0$ sur le compact F. Donc, si G est un compact tel que $\delta(F,G) < \alpha$ alors il n'a aucun point dans U donc appartient à C_U. C'est dire que F est à l'intérieur de C_U.

- Si F et $\mathrm{Adh}(U)$ ont un point commun x (voir figure 6).

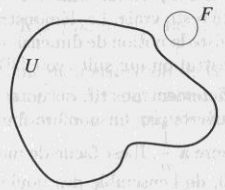

Figure 5

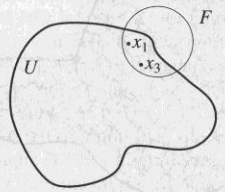

Figure 6

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit x_1 et x_2 deux points dans l'intersection de U et de la boule de centre x et de rayon ε. On ajoute ces deux points à F, on obtient un nouveau compact G. G appartient à C_U et vérifie $\delta(F, G) < \varepsilon$. Soit $\alpha > 0$ la moitié du plus petit des trois nombres $\dfrac{\mathrm{d}(x_1, x_2)}{2}$, $\mathrm{d}(x_1, U^C)$ et $\mathrm{d}(x_2, U^C)$. Si H est un compact vérifiant $\delta(G, H) < \alpha$ alors H a au moins deux éléments dans U. C'est dire que G est à l'intérieur de C_U.

Nous avons donc prouvé que C_U contient un ouvert dense. L'intersection C des C_U est donc une partie résiduelle et les éléments de C n'ont pas de points isolés. Ceci achève la démonstration.

Partie V
Suite récurrente typique

Dans ce paragraphe, nous démontrons une version affaiblie du théorème 5 que nous avons énoncé plus haut. Ainsi dans ce qui suit, X est la boule fermée centrée en 0 et de rayon 1 d'un espace vectoriel de dimension finie. Le lecteur intéressé pourra se reporter à notre article pour un démonstration complète (voir [7]).

1. Espace des suites récurrentes

La suite $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est entièrement déterminée par le couple (f, a) qui appartient à l'espace $C(X) \times X$ où $C(X)$ est celui des fonctions continues de X dans X. Nous notons d la distance usuelle sur cet espace X, d_∞ la distance de la convergence uniforme sur $C(X)$. Si on munit l'espace $C(X) \times X$ de la distance définie par $\delta = \max(d, d_\infty)$, il s'agit d'un espace métrique complet. On peut donc lui appliquer la définition du paragraphe **IV.2**.

2. Théorème de Tietze

Nos démontrations reposent essentiellement sur l'utilisation du théorème de Tietze dans la version suivante (voir [3]).

Théorème

Soit K et L deux compacts homéomorphes à X. Si k est un fermé de K alors toute fonction continue sur k à valeurs dans L admet une extension continue sur K à valeurs dans L.

C'est-à-dire que si f est une fonction continue sur k à valeurs dans L alors il existe une fonction g continue sur K à valeurs dans L coïncidant avec f sur k.

3. Version affaiblie du théorème 5

Dans ce qui suit, nous calquons notre démonstration du paragraphe **IV.3** pour obtenir une démonstration du théorème suivant.

Théorème

Pour (f, a) typique dans $C(X) \times X$, $\omega(f, a)$ est un compact d'intérieur vide, sans points isolés et de mesure nulle.

Preuve. Nous démontrerons la première partie du théorème ce qui correspond à la première partie de la démonstration du cas du compact typique. L'adaptation de la seconde partie est laissée au lecteur (voir [7]). Soit n un entier strictement positif, on note E_n l'ensemble des éléments $(f, a) \in C(X) \times X$ tels que $\omega(f, a) \in M_n$ (voir le paragraphe **IV.4**). Pour démontrer le résultat, il suffit de démontrer que E_n contient un ouvert dense.

Soit $(f, a) \in C(X) \times X$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la compacité de X, nous construisons un recouvrement fini d'ouverts d'adhérences homéomorphes à X et de diamètres inférieurs strictement à ε. Soit p le plus petit entier tel qu'il existe un entier $q < p$ et un élément V du recouvrement contenant à la fois $f^p(a)$ et $f^q(a)$. Soit $m = p - q$. Il est clair que les points a, $f(a)$, $f^2(a)$, ..., $f^{q+m-1}(a)$ sont distincts.

En utilisant la continuité de f, nous construisons une suite de compacts K_0, K_1, ..., K_{q+m-1} homéomorphe (voir figure 7) à X tels que :

- $a \in \mathrm{Int}(K)$
- $\mathrm{d}(K_i) < \varepsilon$ et $f(K_i) \subset \mathrm{Int}(K_{i+1})$ pour $0 \leqslant i \leqslant q + m - 2$,

- $K_i \cap K_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- $K_q \subset V$ et $f(K_{q+m-1}) \subset V$.

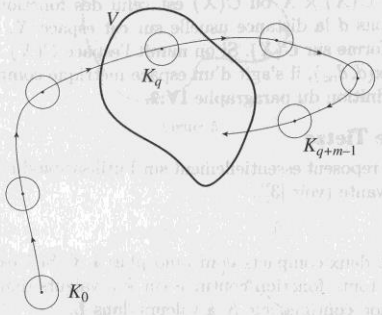

Figure 7

Pour chaque i, nous choisissons alors un compact k_i d'intérieur non vide inclus dans $\mathrm{Int}(K_i)$ de diamètre inférieur strictement à $\dfrac{1}{mn}$ et b_i un point de $\mathrm{Int}(k_i)$.

Pour chaque i, soit $\eta_i > 0$ tel que la boule centrée en b_i de rayon η_i soit incluse dans $\mathrm{Int}(k_i)$. Nous définissons alors une fonction g de la façon suivante.

Pour $0 \leqslant i \leqslant q+m-2$, nous posons $g = b_{i+1}$ sur k_i et $g = f$ sur δK_i. En utilisant le théorème de Tietze, nous prolongeons alors g en une fonction continue sur K_i à valeurs dans K_{i+1}. De même, nous posons $g = b_q$ sur k_{q+m-1}, $g = f$ sur δk_{q+m-1} et nous prolongeons g en une fonction continue sur K_{q+m-1} à valeurs dans $\mathrm{Adh}(V)$. Nous posons ensuite $g = f$ en dehors de $\bigcup_i K_i$. Il est facile de montrer que g est une fonction continue sur X à valeurs dans X et que $\mathrm{d}_\infty(f,g) < \varepsilon$.

Soit $b = b_0$ et $\eta = \min \eta_i$, on montre que $\delta[(f,a),(g,b)] < \varepsilon$. Soit $(h,c) \in C(X) \times X$ tel que $\delta[(h,c),(g,b)] < \eta$, on montre que $\omega(h,c) \subset k_q \cup k_{q+1} \cup \cdots \cup k_{q+m-1}$ donc $\omega(h,c) \in M_n$. Ainsi, toute boule de $C(X) \times X$ (de centre (f,a) et de rayon ε) contient un point (g,b) centre d'une boule (de rayon η) inclus dans M_n. Le résultat suit.

Bibliographie

[1] R. L. Devaney, *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin-Cummings, Menlo Park, 1986.

[2] S. J. Agronsky, A. M. Bruckner et M. Laczkovich, *Dynamics of typical continuous functions*, J. London Math. Soc. (3) 131 (1989), 227-243.

[3] W. Hurewicz et H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1948.

[4] B. Mandelbrot, *Fractals : Forms, chance and dimension*, Freeman, San Francisco, 1977.

[5] M. Berger, *Géométrie*, Cedic Nathan, Paris, 1977.

[6] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris, 1987.

[7] H. Lehning, *Dynamics of typical continuous functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, (6) 123 (1995), 1703-1707.

[8] E. Durand, *Solutions numériques des équations algébriques*, Masson, Paris, 1961.

Nouveau formulaire de mathématiques

Roland Pomès

ouveau formulaire de mathématiques couvre l'ensemble du programme et regroupe tous les résulta
rs.
une forme maniable, il permet de trouver immédiatement l'information voulue, notée avec concision.
ıreusement conforme aux nouveaux programmes, cet ouvrage compact est aussi une véritable peti
ɔpédie portative grâce à son index alphabétique : il renvoie avec précision à près de 1 000 notion
ons et théorèmes.
ès nombreuses figures facilitent la mémorisation des concepts ; des exemples et des conseils pratiqu
ɛtent l'ensemble.

ɛbre
mbres et structures algébriques usuelles
lynômes et fractions rationnelles
ɛbre linéaire
ɔaces euclidiens, espaces hermitiens
alyse
ɔaces vectoriels normés réels ou complexes

2. Fonctions d'une variable réelle
3. Séries
4. Équations différentielles
5. Fonctions de plusieurs variables

III. Géométrie
1. Géométrie affine réelle
2. Géométrie différentielle

ion « Vuibert Supérieur » Série « Usuels » ISBN 2 7117 8833 0 240 pages, 98 FF