



KEN FISCHER/STONE/GETTY IMAGES

Comment calcule-t-on les primes d'assurance vie ou les rentes viagères ? Pour être juste, il faudrait savoir combien de temps chaque bénéficiaire en profitera. C'est impossible. Aussi fait-on appel aux statistiques.

Des nouveaux calculs pour les vieux jours

Tout le monde en parle ! Il faut placer de l'argent pour ses vieux jours. Mais combien placer ? Et que touchera-t-on réellement ? Si l'on place son argent sur un compte rémunéré à taux fixe, le calcul est simple. En revanche, si l'on souscrit à un système mutualiste les choses se compliquent.

Prenons un exemple. Si l'on place 1 000 € au taux de 3 % l'an pendant vingt ans, après une année, le capital est de $1000 \times 1,03$. Après deux ans, il est de $1000 \times 1,03^2$. Et ainsi de suite : les intérêts se composent et, au terme de l'échéance, on détient un capital de $1000 \times 1,03^{20}$, soit 1 806,11 €.

Imaginons maintenant qu'un grand nombre de personnes de 40 ans mutualisent leur épargne de la façon suivante : chacun verse 1 000 €, et, après vingt ans, les survivants se partagent le capital. Combien toucheront-ils ? Le montant dépend avant tout du nombre de personnes encore

Hervé Lehning
professeur de
mathématiques spéciales
au lycée Janson-de-Sailly,
à Paris.
herve.lehning@prepas.org

vivantes à l'échéance. Comme cette macabre prédiction est impossible à réaliser, on fait appel à un outil statistique, les « tables de mortalité ». Elles fournissent une estimation du nombre de personnes vivantes dans une classe d'âge à un moment donné.

De telles tables ont été publiées dès le début du XIX^e siècle, notamment par Emmanuel-Étienne Duvallard. Selon cet économiste suisse, parmi 1 million d'enfants nés une même année, 502 216 vivent encore à l'âge de 20 ans, 369 404 à 40 ans, etc. À l'aide de ces chiffres, il devient possible de reprendre le calcul sur le capital

disponible après mutualisation de l'épargne. On sait en effet qu'en moyenne, pour 369 404 personnes mutualisant leurs épargnes, seules 213 567 en bénéficieront. Après 20 ans, elles toucheront ainsi la somme de 1 806,11 € multipliée par 369 404, à partager en 213 567 parts égales. Chaque survivant devrait obtenir ainsi 3 124 €.

Épargne mutualisée

Simple, voire simpliste, ce calcul illustre le travail accompli par les actuaires* auprès des compagnies d'assurance-vie. En effet, celles-ci ne font rien d'autre que de mutualiser l'épargne de leurs adhérents. Leurs calculs reposent aussi sur des tables de mortalité. Par exemple, si une compagnie s'engage à payer 1 000 € en cas de survie après 20 ans, la prime de base pour une personne de 40 ans doit être de 1 000 € divisés par 3,124, soit 320,10 €. Ce à quoi il faut ajouter les frais et la marge de la compagnie d'assurance vie.

Les données sur la mortalité que nous avons évoquées plus haut ne sont plus guère d'actualité. Aujourd'hui, une table fait foi pour les calculs d'assurance : la « table TPRV-93 ». Établie par l'Insee,

TABLE DE MORTALITÉ
De Duvallard.

AGE.	VIVANTS.	AGE.	VIVANTS.	AGE.	VIVANTS.	AGE.	VIVANTS.
0	1 000 000	25	431 635	50	218 751	75	151 175
1	985 545	26	421 932	51	210 111	76	146 866
2	971 832	27	413 833	52	202 187	77	142 742
3	958 865	28	406 325	53	194 965	78	138 782
4	946 658	29	399 403	54	187 907	79	135 067
5	935 215	30	393 072	55	181 088	80	131 578
6	924 540	31	387 328	56	174 489	81	128 296
7	914 637	32	382 167	57	168 182	82	125 203
8	905 500	33	377 585	58	162 148	83	122 291
9	897 125	34	373 579	59	156 369	84	119 542
10	889 508	35	370 145	60	150 818	85	116 948
11	882 645	36	367 280	61	145 478	86	114 491
12	876 532	37	364 981	62	140 332	87	112 163
13	871 165	38	363 245	63	135 364	88	110 000
14	866 540	39	362 069	64	130 558	89	108 076
15	862 653	40	361 450	65	125 898	90	106 366
16	859 500	41	361 385	66	121 370	91	104 845
17	857 087	42	361 861	67	116 960	92	103 490
18	855 410	43	362 865	68	112 754	93	102 287
19	854 475	44	364 395	69	108 738	94	101 214
20	854 290	45	366 449	70	104 898	95	100 258
21	854 753	46	369 025	71	101 219	96	99 407
22	855 862	47	372 121	72	97 688	97	98 648
23	857 615	48	375 735	73	94 292	98	98 000
24	859 910	49	380 865	74	91 027	99	97 450
25	862 745	50	387 509	75	87 889	100	97 000
26	866 118	51	394 665	76	84 866	101	96 648
27	870 028	52	402 331	77	81 945	102	96 383
28	874 473	53	410 505	78	79 114	103	96 200
29	879 451	54	419 185	79	76 370	104	96 097
30	884 961	55	428 369	80	73 710	105	96 062
31	891 001	56	438 055	81	71 121	106	96 084
32	897 570	57	448 241	82	68 600	107	96 162
33	904 667	58	458 925	83	66 145	108	96 294
34	912 291	59	470 105	84	63 753	109	96 478
35	920 441	60	481 779	85	61 422	110	96 712
36	929 116	61	493 945	86	59 150	111	97 000
37	938 315	62	506 601	87	56 935	112	97 341
38	948 038	63	519 745	88	54 774	113	97 734
39	958 284	64	533 375	89	52 665	114	98 178
40	969 051	65	547 490	90	50 605	115	98 672
41	980 338	66	562 089	91	48 591	116	99 215
42	992 144	67	577 171	92	46 620	117	99 806
43	1 004 468	68	592 735	93	44 690	118	1 00 444
44	1 017 308	69	608 780	94	42 800	119	1 01 137
45	1 030 662	70	625 305	95	40 948	120	1 01 884
46	1 044 528	71	642 309	96	39 133	121	1 02 684
47	1 058 904	72	659 791	97	37 353	122	1 03 536
48	1 073 788	73	677 750	98	35 606	123	1 04 440
49	1 089 178	74	696 185	99	33 891	124	1 05 396
50	1 105 072	75	715 195	100	32 206	125	1 06 404
51	1 121 468	76	734 779	101	30 550	126	1 07 464
52	1 138 364	77	754 935	102	28 922	127	1 08 576
53	1 155 758	78	775 661	103	27 321	128	1 09 740
54	1 173 648	79	796 955	104	25 746	129	1 10 956
55	1 192 032	80	818 815	105	24 195	130	1 12 224
56	1 210 908	81	841 239	106	22 667	131	1 13 544
57	1 230 274	82	864 225	107	21 161	132	1 14 916
58	1 250 128	83	887 771	108	19 676	133	1 16 340
59	1 270 468	84	911 875	109	18 211	134	1 17 816
60	1 291 292	85	936 535	110	16 765	135	1 19 344
61	1 312 608	86	961 749	111	15 337	136	1 20 924
62	1 334 414	87	987 515	112	13 926	137	1 22 556
63	1 356 718	88	1 013 831	113	12 531	138	1 24 240
64	1 379 518	89	1 040 695	114	11 151	139	1 25 976
65	1 402 812	90	1 068 105	115	9 785	140	1 27 764
66	1 426 608	91	1 096 059	116	8 442	141	1 29 604
67	1 450 904	92	1 124 555	117	7 111	142	1 31 496
68	1 475 698	93	1 153 591	118	5 791	143	1 33 440
69	1 500 988	94	1 183 165	119	4 481	144	1 35 436
70	1 526 682	95	1 213 275	120	3 180	145	1 37 484
71	1 552 778	96	1 243 919	121	1 888	146	1 39 584
72	1 579 274	97	1 275 095	122	576	147	1 41 736
73	1 606 168	98	1 306 801	123	273	148	1 43 940
74	1 633 458	99	1 339 035	124	77	149	1 46 196
75	1 661 142	100	1 371 795	125	0	150	1 48 504

CETTE TABLE DE MORTALITÉ est l'une des premières à avoir été publiées, en 1806. On y lit le nombre de survivants d'une même génération suivant leur âge. © DR

cette « Table prospective de rente viagère » repose sur l'extrapolation des mortalités constatées entre 1887 et 1993. Lorsque l'on utilise ses données, on aboutit, dans notre premier calcul, à la somme de 1889,77 € par survivant, et, dans le second calcul, à une prime de 529,16 €. Une telle différence entre les résultats s'explique avant tout par l'allongement de l'espérance de vie depuis le début du XIX^e siècle.

Si c'est cette table qui a été retenue pour les calculs d'assurance, ce n'est pas par hasard. Sa particularité est de présenter des chiffres calculés à partir de la mortalité des femmes uniquement. Si l'on retenait la table relative à la mortalité des hommes, on aboutirait à une rente plus importante pour les survivants car l'espérance de vie est moindre, et à une prime moindre pour obtenir les 1 000 € à 60 ans...

Quotient de mortalité

Chose étonnante, l'Insee affirme que la table TPRV-93 traduit la mortalité des femmes nées en 1950. La plupart d'entre elles sont donc encore vivantes. Comment prévoit-on leur décès ? Nous entrons là dans le domaine de la conjecture... Les premiers statisticiens à avoir dressé des tables de mortalité sont partis de tables relatives à une génération éteinte pour en déduire des probabilités de survie. Ainsi, selon Duvillard, une personne de 40 ans a une probabilité égale à 213 567, divisé par 369 404, c'est-à-dire de 58 %, de vivre encore vingt ans plus tard.

Aujourd'hui, les statisticiens opèrent à l'inverse. Grâce à des estimations de population et de décès, ils calculent d'abord le « quotient de mortalité » des deux sexes à chaque âge. Les choses sont relativement simples si l'on ne prend pas en compte les mouvements migratoires. Le 1^{er} janvier 2004, l'Insee a compté 443 507 hommes de 40 ans et a recensé 925 décès d'hommes de 40 ans pendant l'année 2004. Le quotient de mortalité des hommes de 40 ans est donc estimé à 925, divisé par 443 507, soit 2,086 %. La méthode est fiable si l'on peut appliquer la loi des grands



C'EST À PARTIR DES DONNÉES collectées par l'Insee (ici, une salle d'archives), que l'on établit chaque année des tables de mortalité à partir desquelles on calcule, entre autres, l'espérance de vie à la naissance. © CAROLINE LESPINASSE/REA

nombres ; elle est fantaisiste sinon. En pratique, on a d'autant plus de problèmes que l'on considère des âges élevés. Il faut alors avoir recours à des mathématiques plus élaborées et encore en développement [2]. Les statisticiens reconstruisent ensuite les tables de mortalité à partir des quotients de mortalité des personnes de chaque âge.

Génération fictive

Ici, on ne considère plus une population réelle mais une génération fictive de 100 000 individus qui connaîtraient toute leur vie les conditions de mortalité de l'année considérée. Chaque année, une nouvelle table est construite sur cette génération fictive : on l'appelle la « table du moment ». C'est à ces tables que l'Insee fait appel pour calculer l'espérance de vie à la naissance. Cette méthode — dont on peut penser qu'elle donne une image assez fiable du futur — est fondée sur l'hypothèse que la situation de la mortalité restera identique à ce qu'elle est actuellement — ce qui est faux. On peut toujours néanmoins reconstituer des « tables de mortalité de génération » en utilisant les

quotients de mortalité passés, ou des modèles permettant de prévoir leur évolution dans le futur [3].

Flux migratoires

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte des flux migratoires. Leur influence est-elle importante ? Pour se faire une idée, reprenons les calculs du quotient de mortalité des hommes de 40 ans pendant l'année 2004, en intégrant cette fois les flux migratoires. Le 1^{er} janvier 2005, l'Insee a recensé 443 111 hommes de 41 ans. Le déficit par rapport à l'année précédente est de 396 hommes, pour 925 décès. La différence correspond à un solde migratoire positif de 529 individus. Les résultats sont légèrement faussés car ces hommes ne sont pas tous arrivés le dernier jour de l'année 2004 et, d'autre part, les décès constatés peuvent être ceux de certains d'entre eux. Pour en tenir compte, on augmente la population du 1^{er} janvier 2004 de la moitié de ce flux. Le quotient à appliquer passe alors de 2,086 % à 2,084 %. Une différence suffisamment faible pour que l'on considère que les calculs sans les flux migratoires sont, aujourd'hui, en France, de bonnes approximations. ■

* Les **actuaire**s sont les spécialistes de l'analyse de l'impact financier du risque.

[1] Emmanuel-Étienne Duvillard de Durand, *Influence de la petite vérole sur la mortalité*, 1806.

[2] F. Meslé et J. Vallin, *Population F*, 57, 603, 2002.

[3] F. Meslé et J. Vallin, *Données statistiques*, 4, INED, 2001.