



KEN FISCHER/STONE/GETTY IMAGES

Comment calcule-t-on les primes d'assurance vie ou les rentes viagères ? Pour être juste, il faudrait savoir combien de temps chaque bénéficiaire en profitera. C'est impossible. Aussi fait-on appel aux statistiques.

Des nouveaux calculs pour les vieux jours

Tout le monde en parle ! Il faut placer de l'argent pour ses vieux jours. Mais combien placer ? Et que touchera-t-on réellement ? Si l'on place son argent sur un compte rémunéré à taux fixe, le calcul est simple. En revanche, si l'on souscrit à un système mutualiste les choses se compliquent.

Prenons un exemple. Si l'on place 1 000 € au taux de 3 % l'an pendant vingt ans, après une année, le capital est de $1000 \times 1,03$. Après deux ans, il est de $1000 \times 1,03^2$. Et ainsi de suite : les intérêts se composent et, au terme de l'échéance, on détient un capital de $1000 \times 1,03^{20}$, soit 1 806,11 €.

Imaginons maintenant qu'un grand nombre de personnes de 40 ans mutualisent leur épargne de la façon suivante : chacun verse 1 000 €, et, après vingt ans, les survivants se partagent le capital. Combien toucheront-ils ? Le montant dépend avant tout du nombre de personnes encore

Hervé Lehning
professeur de
mathématiques spéciales
au lycée Janson-de-Sailly,
à Paris.
herve.lehning@prepas.org

vivantes à l'échéance. Comme cette macabre prédiction est impossible à réaliser, on fait appel à un outil statistique, les « tables de mortalité ». Elles fournissent une estimation du nombre de personnes vivantes dans une classe d'âge à un moment donné.

De telles tables ont été publiées dès le début du XIX^e siècle, notamment par Emmanuel-Étienne Duillard. Selon cet économiste suisse, parmi 1 million d'enfants nés une même année, 502 216 vivent encore à l'âge de 20 ans, 369 404 à 40 ans, etc. À l'aide de ces chiffres, il devient possible de reprendre le calcul sur le capital

disponible après mutualisation de l'épargne. On sait en effet qu'en moyenne, pour 369 404 personnes mutualisant leurs épargnes, seules 213 567 en bénéficieront. Après 20 ans, elles toucheront ainsi la somme de 1 806,11 € multipliée par 369 404, à partager en 213 567 parts égales. Chaque survivant devrait obtenir ainsi 3 124 €.

Épargne mutualisée

Simple, voire simpliste, ce calcul illustre le travail accompli par les actuaires* auprès des compagnies d'assurance-vie. En effet, celles-ci ne font rien d'autre que de mutualiser l'épargne de leurs adhérents. Leurs calculs reposent aussi sur des tables de mortalité. Par exemple, si une compagnie s'engage à payer 1 000 € en cas de survie après 20 ans, la prime de base pour une personne de 40 ans doit être de 1 000 € divisés par 3,124, soit 320,10 €. Ce à quoi il faut ajouter les frais et la marge de la compagnie d'assurance vie.

Les données sur la mortalité que nous avons évoquées plus haut ne sont plus guère d'actualité. Aujourd'hui, une table fait foi pour les calculs d'assurance : la « table TPRV-93 ». Établie par l'Insee,

TABLE DE MORTALITÉ
De Duillard.

AGE.	VIVANTS.	AGE.	VIVANTS.	AGE.	VIVANTS.	AGE.	VIVANTS.
0	1 000 000	25	431 635	50	218 581	75	151 175
1	985 545	26	421 932	51	210 111	76	146 866
2	971 090	27	412 229	52	201 647	77	142 561
3	956 635	28	402 526	53	193 183	78	138 256
4	942 180	29	392 823	54	184 719	79	133 951
5	927 725	30	383 120	55	176 255	80	129 646
6	913 270	31	373 417	56	167 791	81	125 341
7	898 815	32	363 714	57	159 327	82	121 036
8	884 360	33	354 011	58	150 863	83	116 731
9	869 905	34	344 308	59	142 399	84	112 426
10	855 450	35	334 605	60	133 935	85	108 121
11	840 995	36	324 902	61	125 471	86	103 816
12	826 540	37	315 199	62	117 007	87	99 511
13	812 085	38	305 496	63	108 543	88	95 206
14	797 630	39	295 793	64	100 079	89	90 901
15	783 175	40	286 090	65	91 615	90	86 596
16	768 720	41	276 387	66	83 151	91	82 291
17	754 265	42	266 684	67	74 687	92	77 986
18	739 810	43	256 981	68	66 223	93	73 681
19	725 355	44	247 278	69	57 759	94	69 376
20	710 900	45	237 575	70	49 295	95	65 071
21	696 445	46	227 872	71	40 831	96	60 766
22	681 990	47	218 169	72	32 367	97	56 461
23	667 535	48	208 466	73	23 903	98	52 156
24	653 080	49	198 763	74	15 439	99	47 851
25	638 625	50	189 060	75	6 975	100	43 546
26	624 170	51	179 357	76	2 511		
27	609 715	52	169 654				
28	595 260	53	159 951				
29	580 805	54	150 248				
30	566 350	55	140 545				
31	551 895	56	130 842				
32	537 440	57	121 139				
33	522 985	58	111 436				
34	508 530	59	101 733				
35	494 075	60	92 030				
36	479 620	61	82 327				
37	465 165	62	72 624				
38	450 710	63	62 921				
39	436 255	64	53 218				
40	421 800	65	43 515				
41	407 345	66	33 812				
42	392 890	67	24 109				
43	378 435	68	14 406				
44	363 980	69	4 703				
45	349 525	70	507				
46	335 070	71	57				
47	320 615	72	7				
48	306 160	73	0				
49	291 705	74	0				
50	277 250	75	0				
51	262 795	76	0				
52	248 340	77	0				
53	233 885	78	0				
54	219 430	79	0				
55	204 975	80	0				
56	190 520	81	0				
57	176 065	82	0				
58	161 610	83	0				
59	147 155	84	0				
60	132 700						
61	118 245						
62	103 790						
63	89 335						
64	74 880						
65	60 425						
66	45 970						
67	31 515						
68	17 060						
69	2 605						
70	0						

CETTE TABLE DE MORTALITÉ est l'une des premières à avoir été publiées, en 1806. On y lit le nombre de survivants d'une même génération suivant leur âge. © DR

cette « Table prospective de rente viagère » repose sur l'extrapolation des mortalités constatées entre 1887 et 1993. Lorsque l'on utilise ses données, on aboutit, dans notre premier calcul, à la somme de 1889,77 € par survivant, et, dans le second calcul, à une prime de 529,16 €. Une telle différence entre les résultats s'explique avant tout par l'allongement de l'espérance de vie depuis le début du XIX^e siècle.

Si c'est cette table qui a été retenue pour les calculs d'assurance, ce n'est pas par hasard. Sa particularité est de présenter des chiffres calculés à partir de la mortalité des femmes uniquement. Si l'on retenait la table relative à la mortalité des hommes, on aboutirait à une rente plus importante pour les survivants car l'espérance de vie est moindre, et à une prime moindre pour obtenir les 1 000 € à 60 ans...

Quotient de mortalité

Chose étonnante, l'Insee affirme que la table TPRV-93 traduit la mortalité des femmes nées en 1950. La plupart d'entre elles sont donc encore vivantes. Comment prévoit-on leur décès ? Nous entrons là dans le domaine de la conjecture... Les premiers statisticiens à avoir dressé des tables de mortalité sont partis de tables relatives à une génération éteinte pour en déduire des probabilités de survie. Ainsi, selon Duillard, une personne de 40 ans a une probabilité égale à 213 567, divisé par 369 404, c'est-à-dire de 58 %, de vivre encore vingt ans plus tard.

Aujourd'hui, les statisticiens opèrent à l'inverse. Grâce à des estimations de population et de décès, ils calculent d'abord le « quotient de mortalité » des deux sexes à chaque âge. Les choses sont relativement simples si l'on ne prend pas en compte les mouvements migratoires. Le 1^{er} janvier 2004, l'Insee a compté 443 507 hommes de 40 ans et a recensé 925 décès d'hommes de 40 ans pendant l'année 2004. Le quotient de mortalité des hommes de 40 ans est donc estimé à 925, divisé par 443 507, soit 2,086 %. La méthode est fiable si l'on peut appliquer la loi des grands



C'EST À PARTIR DES DONNÉES collectées par l'Insee (ici, une salle d'archives), que l'on établit chaque année des tables de mortalité à partir desquelles on calcule, entre autres, l'espérance de vie à la naissance. © CAROLINE LESPINASSE/REA

nombre ; elle est fantaisiste sinon. En pratique, on a d'autant plus de problèmes que l'on considère des âges élevés. Il faut alors avoir recours à des mathématiques plus élaborées et encore en développement [2]. Les statisticiens reconstruisent ensuite les tables de mortalité à partir des quotients de mortalité des personnes de chaque âge.

Génération fictive

Ici, on ne considère plus une population réelle mais une génération fictive de 100 000 individus qui connaîtraient toute leur vie les conditions de mortalité de l'année considérée. Chaque année, une nouvelle table est construite sur cette génération fictive : on l'appelle la « table du moment ». C'est à ces tables que l'Insee fait appel pour calculer l'espérance de vie à la naissance. Cette méthode — dont on peut penser qu'elle donne une image assez fiable du futur — est fondée sur l'hypothèse que la situation de la mortalité restera identique à ce qu'elle est actuellement — ce qui est faux. On peut toujours néanmoins reconstituer des « tables de mortalité de génération » en utilisant les

quotients de mortalité passés, ou des modèles permettant de prévoir leur évolution dans le futur [3].

Flux migratoires

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte des flux migratoires. Leur influence est-elle importante ? Pour se faire une idée, reprenons les calculs du quotient de mortalité des hommes de 40 ans pendant l'année 2004, en intégrant cette fois les flux migratoires. Le 1^{er} janvier 2005, l'Insee a recensé 443 111 hommes de 41 ans. Le déficit par rapport à l'année précédente est de 396 hommes, pour 925 décès. La différence correspond à un solde migratoire positif de 529 individus. Les résultats sont légèrement faussés car ces hommes ne sont pas tous arrivés le dernier jour de l'année 2004 et, d'autre part, les décès constatés peuvent être ceux de certains d'entre eux. Pour en tenir compte, on augmente la population du 1^{er} janvier 2004 de la moitié de ce flux. Le quotient à appliquer passe alors de 2,086 % à 2,084 %. Une différence suffisamment faible pour que l'on considère que les calculs sans les flux migratoires sont, aujourd'hui, en France, de bonnes approximations. ■

* Les **actuaire**s sont les spécialistes de l'analyse de l'impact financier du risque.

[1] Emmanuel-Étienne Duillard de Durand, *Influence de la petite vérole sur la mortalité*, 1806.

[2] F. Meslé et J. Vallin, *Population F*, 57, 603, 2002.

[3] F. Meslé et J. Vallin, *Données statistiques*, 4, INED, 2001.